Содержание

1 Дискретные системы

Рассмотрим свойства линейных дискретных моделей, служащих для описания дискретных (квантованных во времени) динамических процессов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. ***Динамическим процессом*** *(движением) называется развитие во времени некоторого физического явления. К процессам относят движения механизмов, тепловые явления, экономические и экологические процессы.*

Процессы порождают информационные потоки, т.е. вторичные процессы, несущие информацию о рассматриваемом явлении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Процесс, содержащий информацию о развитии явления (первичном процессе), называется* ***сигналом****.*

При рассмотрении сигнала принято различать его информационное содержание (информацию о первичном процессе) и физическую природу соответствующего вторичного процесса (носителя).

В различных областях науки приняты свои определения и подходы к изучению сигналов. Например, кибернетическая трактовка этого понятия предусматривает отказ от изучения природы и первичного процесса, и носителя сигнала. Сигнал отождествляется с количественной информацией об изменении физических переменных изучаемого процесса. При этом учитывается, что по различным причинам реальный сигнал не содержит всей информации о развитии явления, но может содержать и постороннюю информацию.

Развитие процесса **непрерывного времени** (непрерывного, неквантованного процесса) характеризуется переменной $x(t)$, принимающей произвольные значния из числовой области X и определенной в любые моменты времени $t > t_0$.

Развитие **дискретного** (квантованного по уровню) процесса характеризуется переменной $x(t)$, принимающей строго фиксированные значения x^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и определенной в любые моменты времени. В большинстве случаев можно положить

$$x^i = i \cdot \Delta, i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где Δ – приращение или дискрета.

К квантованным по уровню процессам относят:

- релейные процессы и двоичные сигналы;
- прерывистые процессы в дискретных автоматических линиях;
- движение пневматических роботов-маниптяторов, имеющих конечное число фиксированных положений в пространстве;
- процессы обновления информации в регистрах.

В тех случаях, когда число состояний n достаточно велико или приращение Δ мало, квантованием по уровню пенебрегают.

Развитие дискретного процесса, или процесса дискретного времени, характеризуется переменной $x(t)$, принимающей произвольные значения и определенной в фиксированные моменты времени t_i, где $i = 0, 1, 2, \ldots$. В большинстве случаев квантование осуществляется с постоянным интервалом квантования (дискретности) T, т.е.

$$t = i \cdot T, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

К дискретным процессам такого рода относятся:

- экономические процессы, связанные с календарем (динамика курса, роста цен, спада производства и т.п.);
- процессы в цифровых вычислительных устройствах, где $T = 1/f$, f – тактовая частота процессора;
- процессы в цифровых системах управления, в которых дискретность по времени обусловлена циклическим характером обработки информации в выходном регистре управляющей ЭВМ.

При достаточно малых (по сравнению с длительностью других процессов) интервалах T дискретностью по времени пренебрегают, и квантовый по времени процесс относят к процессам непрерывного времени.

К дискретным обычно относят такие кусочно-постоянные процессы и сигналы, которые характеризуются переменной $x(t)$, скачкообразно изменяющейся в фиксированные моменты времени.

В дальнейшем будем рассматривать квантование по времени с постоянным интервалом (периодом или интервалом дискретности) T, будем считать, что сигналы дискретной системы $x(kT)$ представлены последовательностями идеальных импульсов различной амплитуды, определенных в равноотстоящие моменты времени $t = kT$. Целое число $k = 0, 1, 2, \dots$ называется **дискретным временем**, а сами амплитудно-модулированные импульсные последовательности – **решетчатыми функциями**.

С целью упрощения обозначений дискретные сигналы рассматриваемого типа часто записываются просто как функции дискретного времени $x(k)$, т.е.

$$x(k) \triangleq x(kT).$$

1.1 Дискретные модели динамических процессов

Описание дискретного процесса можно представить как решение разностного уравнения. Наиболее распространены разностные уравнения n-го порядка (модели вход-выход) и системы уравнений первого порядка (модели вход-состояние-выход), а также их операторные формы. Дискретные модели либо отражают динамику реальных квантованных по времени процессов, либо являются одной из форм приближенного описания систем непрерывного времени. В последнем случае возникает необходимость рассмотрения вопросов квантования и методов преобразования динамических систем к дискретной форме, т.е. их дискретизации.

1.1.1 Построение дискретных моделей

Разностные уравнения, описывающие динамику систем дискретного времени, получаются в результате анализа реальных (физических, экономических и т.д.) процессов в различные моменты дискретного времени k.

Пример 1. Рассмотрим счетчик, содержание которого в дискретные моменты времени k описывается функцией $x_1(k)$ с начальным значением $x_1(0) = x_{10}$. В момент k на вход счетчика поступает сигнал $x_2(k)$, в результате чего в последующий момент дискретного времени $k+1$ происходит увеличение содержания счетчика на величину этого сигнала:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k). \tag{1}$$

Рис. 1: Система склад-магазин

Последнее выражение является моделью счетчика, представленной в форме разностного уравнения первого порядка. Значение $x_1(0) = x_{10}$ играет роль начального условия.

Уравнение (1) можно записать в операторной форме. Введем для этого **оператор сдвига** (упреждения) z, действующий по схеме

$$z\,x(k) = x(k+1),$$

и после элементарных преобразований получим

$$x_1(k) = \frac{1}{z-1} x_2(k). \tag{2}$$

Оператор $1/(z-1)$ является передаточной функцией дискретной системы.

Для дискретных и дискретно-непрерывных систем вводится понятие **дискретной передаточной функции**. Пусть $u(k)$ – входной дискретный сигнал такой системы, а $y(k)$ – её дискретный выходной сигнал, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда передаточная функция $W(z)$ такой системы записывается в виде:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)},$$

где $U(z)$ и $Y(z)$ – z-преобразования для сигналов $u(k)$ и $y(k)$ соответственно:

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}, \tag{3}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}. \tag{4}$$

Пример 2. Проанализируем прохождение однородных предметов (товаров) в торговой системе склад-магазин, функциональная схема которой представлена на рис. 1. Здесь $x_1(k)$ – число товаров в магазине, $x_2(k)$ – товары, поступающие со склада, $u(k)$ – заказанное количество товаров, $f(k)$ – число реализованных товаров, k – дискретное время в днях. Начальное состояние системы (в момент $k = 0$ характеризуется значениями $x_1(0)$ и $x_2(0)$).

Динамика товаров в магазине описывается разностным уравнением

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - f(k), \tag{5}$$

в котором число проданных единиц товара $f(k)$ выступает в роли возмущающего воздействия. Полагая, что заявка выполняется складом с задержкой в один день, запишем модель склада в виде

$$x_2(k+1) = u(k), \tag{6}$$

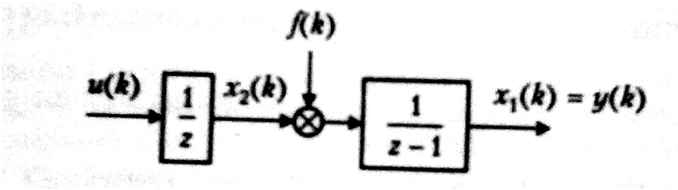

Рис. 2: Структурная схема системы склад-магазин

где заявка $u(k)$ на требуемое количество товара играет роль управляющего воздействия. Если задача управления ставится как задача регулирования объема товаров в магазине, то переменная x_1 считается выходом системы:

$$y(k) = x_1(k). \tag{7}$$

Таким образом, рассматриваемая система описывается уравнениями состояния (5)–(6) и уравнением выхода 7. Разностные уравнения состояния связывают значения переменных состояния x_1 и x_2 в последующий момент дискретного времени (следующий день) $k+1$ с переменными системы в текущий момент времени k.

С использованием оператора сдвига z полученные разностные уравнения (5)–(6) можно привести к операторной форме:

$$x_1(k) = \frac{1}{z-1}(x_2(k) - f(k)), \tag{8}$$

$$x_2(k) = \frac{1}{z}u(k), \tag{9}$$

удобной для построения структурной схемы (рис.2).

Модель дискретной системы может быть также представлена в форме вход-выход. Для этого уравнение (5) переписывается для времени $k+2$:

$$x_1(k+2) = x_1(k+1) + x_2(k+1) - f(k+1). \tag{10}$$

После подстановки выражений (6) и (7), находим

$$y(k+2) - y(k+1) = u(k) - f(k+1). \tag{11}$$

Полученное разностное уравнение второго порядка связывает объемы товаров в моменты дискретного времени $k+1$ и $k+2$ с соответствующими значениями заказа $u(k)$ и продаж $f(k+1)$.

Для решения задачи стабилизации количества товаров в магазине y на заданном уровне $y^* = const$ может быть использована простейшая стратегия управления заказами – пропорциональный алгоритм управления

$$u(k) - K\epsilon(k), \tag{12}$$

где

$$\epsilon(k) = y^* - y(k)$$

– отклонение, K – постоянный коэффициент. Графики процессов в такой системе при постоянном спросе $f(k) = const$ приведены представляются дискретными сигналами (решетчатыми функциями) $y(k) = x_1(k)$, $x_2(k)$, $u(k)$ и $f(k)$.

Процедура преобразования сигнала непрерывного времени $x(t)$ к дискретному (квантованному по времени) виду называется **квантованием**. Такая процедура отражает как реальные процессы, проходящие в цифровых системах управления, так и математические операции, использующиеся в различных сферах теории информации.

В результате квантования получается импульсная последовательность $x(kT)$ (решетчатая функция), которая при $t = kT$ совпадает с исходным сигналом:

$$x(kT) = x(t)|_{t=kT},$$

а в другие моменты времени не определена. Потеря информации при квантовании зависит от величины интервала квантования T или частоты квантования

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Выбор интервала T обычно осуществляется из соображений теоретической возможности восстановления исходного сигнала по полученной в результате квантования импульсной послеовательности (дискретной выборке), что отражает содержание известной теоремы прерывания (теоремы Котельникова-Шеннона).

ТЕОРЕМА 1.1. *Непрерывный сигнал $x(t)$ можно представить в виде интерполяционного ряда:*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\mathrm{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta}(t - k\Delta)\right],$$

где $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ *– функция* sinc. *Интервал дискретизации удовлетворяет ограничениям $0 < \Delta \leqslant \frac{1}{2f_c}$. Мгновенные значения данного ряда есть дискретные отсчёты сигнала $x(k\Delta)$.*

Рассмотрим задачу нахождения сигнала $x(t)$ по известной решетчатой функции $x(kT)$, полагая, что спектр сигнала $x(t)$ ограничен частотой ω_{max}. Тогда, в соответствии с теоремой прерывания, точное восстановление функции $x(t)$ теоретически возможно при условии, что частота квантования ω более чем в 2 раза превосходит наибольшую частоту ω_{max}, а для интервала квантования выполняется

$$T < \frac{\pi}{\omega_{max}}. \tag{13}$$

Данное неравенство широко используется в задачах идентификации динамических систем и дискретизации непрерывных моделей. Применение теории прерывания в задачах синтеза цифровых систем управления имеет свои особенности.

1.1.2 Дискретизация автономных систем

Под **дискретизацией** системы подразумевается преобразование непрерывной динамической модели к дискретной форме описания – одной из форм разностных уравнений. При этом предполагается, что в моменты $t = kT$ импульсные сигналы $x(kT)$ полученной дискретной модели с определенной степенью точности повторяют значения сигналов $x(t)$ исходной непрерывной системы.

Ограничимся рассмотрением автономной линейной системы, для которой существует точное решение задачи дискретизации.

Рассмотрим модель состояние-выход линейной системы управления

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), && (14) \\ y(t) &= Cx(t), && (15) \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $x(0) = x_0$, $y \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода. Решение уравнения (14) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0. \tag{16}$$

Рассмотрим значения $x(t)$ в дискретные моменты времени. При $t = kT$ получим

$$x(kT) = e^{AkT}x_0, \tag{17}$$

а при $t = (k+1)T$ –

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x_0 = e^{AT}e^{AkT}x_0 = e^{AT}x(k). \tag{18}$$

Следовательно, дискретный аналог уравнения состояния (14) имеет вид

$$x((k+1)T) = A_d x(kT), \tag{19}$$

где

$$A_d = e^{AT} = I + TA + \frac{T^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{T^j}{j!}A^j + \ldots \tag{20}$$

Соответствующее уравнение выхода дискретной системы получается прямой подстановкой $t = kT$ в выражение (15):

$$y(kT) = C_d x(kT), \tag{21}$$

где $C_d = C$. Таким образом, получена дискретная система (19), (21), процессы которой в квантованные моменты времени $t = kT$ точно совпадают с процессами в исходной системе (14)–(15). Так как решения дискретной системы в промежуточные моменты времени не определены, то корректный подход к дискретной форме предусматривает выбор достаточно малого интервала квантования T. Максимально допустимое значение T устанавливается теоремой прерывания (см. неравенство (13)).

Экспоненциальная зависимость матриц уравнений состояния непрерывной и дискретной систем позволяет сделать важный вывод о связи их собственных значений, а значит и корней соответствующих характеристических многочленов. В силу определения матрицы A_d и свойства матричной экспоненты

$$z_i = \lambda_i\{e^{At}\} = e^{\lambda_i t}, i = \overline{1, n},$$

запишем

$$\lambda_i\{A_d\} = \lambda_i\{e^{AT}\} = e^{T\lambda_i\{A\}}, i = \overline{1, n}, \tag{22}$$

что приводит к следующему заключению.

Свойство. Корни p_i характеристического многочлена $\det(pI - A)$ непрерывной системы (14)–(15) связаны с корнями z_i характеристического многочлена $\det(zI - A_d)$ эквивалентной дискретной системы (19), (21) соотношением

$$z_i = e^{Tp_i}, i = \overline{1, n}. \tag{23}$$

Замечание. Отображение (23) не однозначно, и в общем случае нескольким различным значениям p_i соответствует одно и то же значение z_i. Тем не менее при выборе достаточно малого интервала T, удовлетворяющего условиям теоремы прерывания, имеет место взаимно-однозначное соответствие корней непрерывной и эквивалентной дискретной систем.

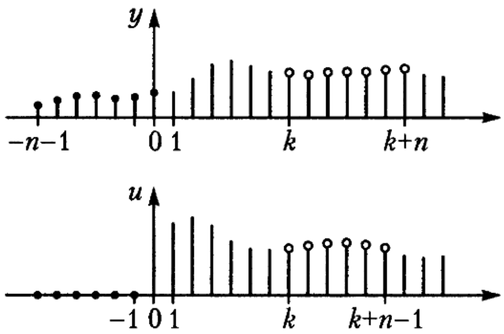

Рис. 3: Процессы дискретной системы

1.2 Модели вход-выход

В общем случае линейная модель вход-выход одноканальной дискретной системы (объекта управления) представлена разностным уравнением вида:

$$\begin{aligned} y(k+n) &+ a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = \\ &= b_1 u(k+n-1) + \ldots + b_{n-1} u(k+1) + b_n u(k), \end{aligned} \tag{24}$$

где $y(k)$, $u(k)$ – дискретные сигналы (решетчатые функции), соответствующие выходной и входной переменным, a_i, b_i – коэффициенты (параметры модели), n – порядок модели. Уравнение (24) связывает значения входных сигналов $u(k)$ в различные моменты дискретного времени $\overline{k, k+n}$ со значениями входных сигналов $y(k)$ в моменты $\overline{k, k+n-1}$ (рис.3). При этом предполагается, что начальные значения выходной переменной

$$y(0), y(-1), \ldots, y(-n+1)$$

известны, а управляющий сигнал удовлетворяет условиям

$$u(-1) = \ldots = u(-n+1) = 0. \tag{25}$$

Модель (24) можно переписать в операторной форме. Для этого введем в рассмотрение **оператор сдвига (упреждения**

$$z: \quad z\, y(k) = y(k+1)$$

и положим, что

$$z^i\, y(k) = y(k+i).$$

С учетом введенных обозначений уравнение (24) легко преобразуется к виду

$$a(z) y(k) = b(z) u(k), \tag{26}$$

где используются операторы

$$a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \tag{27}$$

$$b(z) = b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n. \tag{28}$$

Оператор $a(z)$ называется **характеристическим многочленом** системы (24), а комплексные числа z_i, $i = \overline{1, n}$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$a(z) = 0, \tag{29}$$

называются **полюсами системы**.

Корни алгебраического уравнения

$$(z) = 0, \tag{30}$$

т.е. комплексные числа z_i^0, $i = \overline{1, m}$, называются **нулями системы** (24).

Из уравнения (26) легко найти явную связь переменных $y(k)$ и $u(k)$ в виде операторного уравнения

$$y(k) = W(z)u(k), \tag{31}$$

где оператор

$$W(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \tag{32}$$

называется **передаточной функцией** дискретной системы (24).

Описание **автономной дискретной системы** дается однородным уравнением вида

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_n y(k) = 0 \tag{33}$$

или, в операторной форме, – уравнением

$$a(z)y(k) = 0. \tag{34}$$

Возмущающее воздействие $f(k)$, характеризующее влияние на объект управления внешней среды, рассматривается как дополнительный входной сигнал. Тогда линейная модель дискретной системы примет вид

$$\begin{aligned} y(k+n) &+ a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = \\ &= b_1 u(k+n-1) + \ldots + b_{n-1} u(k+1) + b_n u(k) + \\ &+ d_1 f(k+n-1) + \ldots + d_{n-1} f(k+1) + d_n f(k), \end{aligned} \tag{35}$$

где d_i – коэффициенты, определяющие влияние на процессы в системе возмущения $f(k)$.

После соответствующих преобразований получаем операторную форму модели (35):

$$a(z)y(k) = b(z)u(k) + d(z)f(k), \tag{36}$$

где используется оператор

$$d(z) = d_1 z^{n-1} + \ldots + d_{n-1} p + z_n,$$

и форму

$$y(k) = W(z)u(k) + W_f(z)f(k),$$

где

$$W_f(z) = \frac{d(z)}{a(z)}$$

– передаточная функция по возмущающему воздействию $f(k)$.

Сама форма представления моделей вход-выход указывает простой путь для получения рекуррентного решения, т.е. процедуры нахождения текущих значений $y(k)$ по известным значениям y и u в редшествующие моменты дискретного времени k.

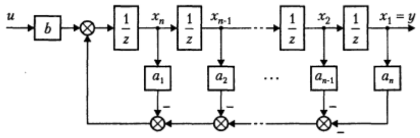

Рис. 4: Структурная схема дискретной системы (частный случай)

1.3 Модели вход-состояние-выход

Проанализируем частный случай управляемой дискретной системы, описываемой уравнением

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \ldots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = bu(k). \tag{37}$$

Введем в рассмотрение переменные состояния

$$\begin{array}{rcl} x_1(k) & = & y(k), \\ x_2(k) & = & y(k+1), \\ & \ldots & \\ x_n(k) & = & y(k+n-1) \end{array} \tag{38}$$

с начальными значениями

$$x_1(0) = y(0),\ x_2(0) = y(1), \ldots,\ x_n(0) = y(n-1).$$

Используя выражения (37) и (39), найдем уравнения состояния – систему n разностных уравнений первого порядка вида

$$\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & x_2(k), \\ x_2(k+1) & = & x_3(k), \\ & \ldots & \\ x_n(k+1) & = & -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \ldots - a_1 x_n + bu(k). \end{array} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

При этом уравнение выхода имеет вид

$$y(k) - x_1(k). \tag{41}$$

Структурная схема полученной модели приведена на рис.5.

Она строится с использованием оператора сдвига (запаздывания) $1/z$, связывающих два соседних значения переменной x по правилу

$$x(k) = \frac{1}{z} x(k+1).$$

Уравнения (39)–(41) представляют собой простейший случай модели **вход-состояние-выход** (ВСВ). В более общем случае модель ВСВ управляемой дискретной системы содержит уравнения состояния вида

$$\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & a_{11} x_1(k) + a_{12} x_2(k) + \ldots + a_{1n} x_n(k) + b_1 u(k), \\ x_2(k+1) & = & a_{21} x_1(k) + a_{22} x_2(k) + \ldots + a_{2n} x_n(k) + b_2 u(k), \\ & \ldots & \\ x_n(k+1) & = & a_{n1} x_1(k) + a_{n2} x_2(k) + \ldots + a_{nn} x_n(k) + b_n u(k), \end{array} \tag{42}$$

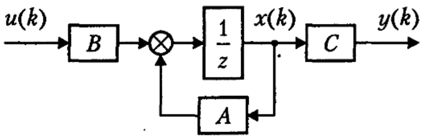

Рис. 5: Структурная схема дискретной системы

и уравнение выхода

$$y(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + \ldots + c_n x_n(k), \tag{43}$$

где a_{ij}, b_i, c_i – постоянные или зависящие от времени коэффициенты (параметры). Модель (42)–(43) связывает вход $u(k)$ и выход $y(k)$ через промежуточные переменные $x_i(k)$.

Для преобразования модели к компактной векторно-матричной форме необходимо определить вектор состояния $x = \{x_i\} \in \mathbb{R}^n$, а также матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_i\}$ и $C = \{c_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда уравнения (42)–(43), описывающие модель вход-состояние-выход, принимают вид:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \qquad (44)\\ y(k) &= Cx(k), \qquad (45) \end{aligned}$$

где $x(0) = x_0$. Структурная схема модели приведена на рис.**??**.

Уравнения вход-состояние-выход можно записать в операторной форме. С помощью оператора упреждения z, запишем $x(k+1) = z\, x(k)$. Тогда из уравнений (44) и (45) находим

$$x = (zI - A)^{-1} Bu, \tag{46}$$

и

$$y = W(z)u, \tag{47}$$

где

$$W(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = C(zI - A)^{-1} B \tag{48}$$

– передаточная функция дискретной системы. Нетрудно получить, что

$$a(z) = \det(zI - A)$$

и, следовательно, полюсы системы z_i (корни характеристического многочлена $a(z)$)совпадают с собственными числами матрицы A:

$$z_i = \lambda_i\{A\},\ i = \overline{1, n}.$$

Автономная модель дискретной системы является частным случаем модели ВСВ (44)–(45) в отсутствие входных воздействий: $u = 0$. Она принимает вид

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k), \qquad (49)\\ y(k) &= Cx(k). \qquad (50) \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаются модели ВСВ многоканальных систем, а также модели возмущенных дискретных систем, на входы которых поступают дополнительные импульсные сигналы (возмущающие воздействия).

В простейшем частном случае уравнения состояния возмущенной системы принимают вид

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= x_3(k), && (51) \\ &\dots && (52) \\ x_n(k+1) &= -a_n x_1(k) - \ldots - a_1 x_n(k) + bu(k) + df(k). && (53) \end{aligned}$$

В более общем случае возмущенная дискретная система может быть представлена в векторно-матричной форме, содержащей уравнение сосояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Df(k) \tag{54}$$

и уравнение выхода (45).

1.4 Свойства моделей

Рассмотрим поведение автономной модели (49)–(50) и решения

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x_0, && (55) \\ y(k) &= CA^k x_0. && (56) \end{aligned}$$

Если для $x(0) = x^*$ и любых $k \geq 0$ имеет место тождество

$$x(k) = x^*,$$

то значение $x = x^*$ называется **равновесным состоянием** или **положением равновесия** автономной системы. Очевидно, что в равновесном состоянии выполняется

$$x(k+1) = x(k) \tag{57}$$

и, следовательно,

$$(I - A)x^* = 0. \tag{58}$$

При условии $\det(I - A) \neq 0$ получаем, что единственным положением равновесия системы (49) является начало координат пространства состояний $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$x^* = 0,$$

а при $\det(I - A) = 0$ существуют нетривиальные множества равновесных состояний (прямые и плоскости – подпространства), удовлетворяющие уравнению (58).

Равновесное состояние $x = 0$ асимптотически устойчиво и, следовательно, $x(k) \to 0$ при $k \to \infty$, если выполняется

$$|z_i| = |\lambda\{A\}| < 1,\ i = \overline{1, n}. \tag{59}$$

Рассмотрим систему с нулевыми значениями корней характеристического многочлена (или собственных чисел матрицы A):

$$z_i = \lambda\{A\} = 0,\ i = \overline{1, n}.$$

В этом случае матрица A является **нильпотентной** (под нильпотентной матрицей будем понимать матрицу P, для которой существует целое число n такое, что выполняется условие $P^n = O$, где O – нулевая матрица) и, следовательно, найдется целое число $m \in 0, n$ такое, что

$$A^m = 0. \tag{60}$$

Для такой системы всегда выполняется

$$x(n) = A^n x_0 = 0, \tag{61}$$

т.е. имеет место следующее положение.

СВОЙСТВО 1.1. *Переходный процесс дискретной системы n-го порядка с нулевыми значениями всех полюсов z_i сходится из произвольного начального состояния $x(0) = x_0$ к положению равновесия $x = 0$ не более чем за n шагов.*

Перечисленные асимптотические свойства автономных моделей состояния справедливы также для выходной переменной $y(k) = Cx(k)$, и для свободных составляющих переходных процессов и возмущенных дискретных систем.

Рассмотрим поведение модели ВСВ (44)–(45) при постоянном входном воздействии $u(k) \equiv const$ и проанализируем установившиеся составляющие переходного процесса $x_u(k)$ и $y_u(k)$. Заметим, что в рассматриваемом режиме система (44) имеет решение $x_u(k) \equiv const$, запишем $x_u(k+1) = x_u(k)$. Тогда само уравнение (44) принимает вид

$$x_u = Ax_u + Bu. \tag{62}$$

При условии, что $\det(I - A) \neq 0$, алгебраическое уравнение (62) единственным образом разрешимо относительно x_u:

$$x_u = -(I - A)^{-1} Bu. \tag{63}$$

Подставляя найденное решение в уравнение выхода (45), находим статическую характеристику рассматриваемой дискретной системы:

$$y_u = -C(I - A)^{-1} Bu,$$

где, в силу выражения (48),

$$C(I - A)^{-1} B = W(1).$$

Отметим, что для асимптотически устойчивой системы, удовлетворяющей условию (59), всегда выполняется $\det(I - A) \neq 0$, т.е. установившиеся решения единственны. Более того, переходные процессы $x(k)$ и $y(k)$ с течением времени k всегда сходятся к найденным выше установившимся значениям x_u и y_u.

1.5 Управляемость и наблюдаемость

Рассмотрим одноканальные дискретные системы (объекты управления)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k), && (64)\\ y(k) &= Cx(k), && (65) \end{aligned}$$

где $u(k)$ – скалярное управляющее воздействиеб $y(k)$ – скалярная входная переменная, $k \geq 0$, $x(0) = x_0$.

Проблема управляемости сводится к вопросу о существовании ограниченного управляющего воздействия $u = u(k)$, $k \in [0, k_f]$, переводящего систему (64) из произвольного начального состояния $x(0) = x_0$ в произвольную точку пространства состояний $x(k_f) = x_f$ за конечное время k_f. Свойство управляемости не зависит от выходной переменной y и поэтому может быть определено как свойство модели (64).

Основной критерий управляемости дискретной системы связывает полную управляемость с невырожденностью матрицы управляемости

$$U = [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$$

и для одноканальной системы формулируется в виде:

$$\det U \neq 0. \tag{66}$$

Доказательство основного критерия управляемости для дискретной системы строится на базе определения управляемости и предусматривает нахождение в явном виде импульсной последовательности $u(k)$, обеспечивающий перевод системы (64) в произвольную конечную точку $x(k_f) = x_f$.

С помощью общей формулы (**??**) найдем значение вектора состояния x в момент $k = n$:

$$x(n) = A^n x_0 + A^{n-1}Bu(0) + \ldots + ABu(n-2) + Bu(n-1). \tag{67}$$

Выберем $k_f = n$, $x(n) = x_f$ и перепишем последнее уравнение в виде

$$x_f = A^n x_0 + [B|AB|\dots|A^{n-1}B] \left| \begin{array}{l} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \dots \\ u(0) \end{array} \right| . \tag{68}$$

Это алгебраическое уравнение разрешимо относительно вектора u тогда и только тогда, когда матрица управляемости U обратима, т.е. выполняется условие (66). Находим

$$\left| \begin{array}{l} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \dots \\ u(0) \end{array} \right| = U^{-1}(x_f - A^n x_0). \tag{69}$$

Таким образом, найдена импульсная последовательность, которая за конечный отрезок времени $[0, n]$ приводит вектор состояния $x(k)$ в любую заданную точку x_f. Необходимым и достаточным условием существования такой последовательности является условие (66), что и доказывает основной критерий. Более того, на основании вышеизложенного можно сформулировать следующее свойство.

СВОЙСТВО 1.2. *Если дискретная системы порядка n полностью управляема, то она может быть переведена из произвольного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в произвольное конечное состояние $x = x_f$ за конечное время $k = n$.*

Нетрудно видеть, что значение $k = n$ соответствует минимальному времени переходного процесса линейной дискретной системы, или минимальному числу шагов для достижения заданного конечного состояния x_f.

Проблема наблюдаемости одноканальной дискретной системы сводится к вопросу об единственности решения задачи восстановления вектора состояния, т.е. нахождения вектора $x(k)$ в момент времени $k = 0$ по известным измерениям выходной переменной $y = y(k)$ при $k \in [0, k_f]$, $k_f > 0$ и известным значениям входной переменной $u(k)$. Известно, что свойство наблюдаемости не зависит от входной переменной u и поэтому может быть определен как свойство автономной модели (49)–(50).

Основной критерий наблюдаемости связывает полную управляемость с невырожденностью **матрицы наблюдаемости**

$$Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix},$$

и в рассматриваемом случае формулируется в виде

$$\det Q \neq 0. \tag{70}$$

Для **доказательства** основного критерия наблюдаемости положим $k_f = n - 1$ и найдем начальное состояние системы $x_0 = x(0)$ по n заданным измерениям выходной переменной $y(0), y(1), \dots, y(n-1))$. В силу общего выражения (56) запишем формулы для указанных значений y:

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx_0, \\ y(1) &= CAx_0, \qquad (71) \\ &\dots \\ y(n-1) &= CA^{n-1}x_0 \qquad (72) \end{aligned}$$

или в векторном виде

$$\begin{vmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix} x_0. \tag{73}$$

Полученное алгебраическое уравнение разрешимо отнсительно вектора x_0 тогда и только тогда, когда матрица Q обратима, т.е. выполняется условие (70). Находим

$$x_0 = Q^{-1} \begin{vmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{vmatrix}. \tag{74}$$

Таким образом, по заданной импульсной последовательности $y(k)$ при $k \in [0, n-1]$ найдено искомое начальное состояние x_0. Необходимым и достаточным условием единственности полученного значения x_0 является условие (70), что и доказывает основной критерий наблюдаемости. Кроме того, можно сформулировать следующее свойство, применяющееся в задачах наблюдения (оценивания) дискретных процессов.

СВОЙСТВО 1.3. *Если дискретная система порядка n полностью наблюдаема, то число последовательных значений выходной переменной $y(k)$, необходимое для определения ее начального состояния x_0 равно n.*

Нетрудно также показать, что число n является **наименьшим** для восстановления произвольного состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

1.6 Устойчивость дискретных систем

Как и для систем непрерывного времени, под **устойчивостью** дискретной системы понимают ее способность возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов. Тем самым предполагается, что рассматривается свободное движение автономной системы при ненулевых начальных условиях $y(0), y(-1), \ldots, y(-n+1)$ или $x(0)$ соответственно.

Автономная система описывается уравнениями

$$a(z)y(k) = 0 \tag{75}$$

или

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k), & (76)\\ y(k) &= Cx(k), & (77) \end{aligned}$$

имеет характеристический многочлен

$$a(z) = \det(zI - A) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots | a_n \tag{78}$$

и полюсы

$$z_i = \lambda_i\{A\},\ i = \overline{1,n}.$$

Ее равновесное состояние для модели (75) принимает значение $y^* = 0$, а для модели (76) – $x^* = 0$.

Основные понятия устойчивости линейных дискретных систем практически полностью идентичны соответствующим понятиям непрерывных систем. Здесь ограничимся рассмотрением свойства асимптотическое устойчивости, которое в рассматриваемом случае сводится к аттрактивности положений равновесия.

Устойчивость по выходу (техническая устойчивость) определяется характером изменения выходной переменной $y(k)$, т.е. свойствами решений системы (75) или соответствующего выхода системы (76)–(77): *система (75) называется **устойчивой**, если выполняется*

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 0.$$

Устойчивость по состоянию определяется характером изменения вектора состояний $x(k)$, т.е. свойствами решений системы (76): *система (76) называется **устойчивой**, если выполняется*

$$\lim_{k\to\infty} |x(k)| = 0. \tag{79}$$

Как и в случае непрерывных систем, понятия устойчивости по выходной переменной и вектору состояния совпадают при условии полной наблюдаемости рассматриваемой дискретной системы. Для неполностью наблюдаемых систем из устойчивости по выходу, вообще говоря, не следует устойчивость по состоянию.

Справедлив следующий **корневой критерий**.

СВОЙСТВО 1.4. *Дискретная полностью наблюдаемая система (75) или (76)–(77) **асимптотически устойчива** тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$|z_i| = |\lambda_i\{A\}| < 1,\ i = \overline{1,n}. \tag{80}$$

Критерий связывает понятие асимптотической устойчивости с размещением корней характеристического многочлена на комплексной плоскости: расположениевсех корней внутри круга единиченого радиуса эквивалентно асимптотической устойчивости системы. Поэтому окружность единичного радиуса является **границей устойчивости**. Нетрудно показать, что наличие хотя бы одного корня $z_i = z^*$ вне единичного круга, т.е. $|z^*| > 1$, делает дискретную систему неустойчивой. Появление одного вещественного или пары двух комплексно-сопряженных корней на единичной окружности $|z^*| = 1$ при условии расположения остальных корней внутри груга говорит о нейтральной устойчивости (по Ляпунову) дискретной системы.

2 Методы дискретизации непрерывных моделей

2.1 Метод Эйлера

Данный метод предлагает приближенное и наиболее простое решение задачи дискретизации моделей динамических систем. Он основан на формулах приближенного вычисления производной непрерывной функции (или приближенного вычисления определенного интеграла).

Рассмотрим функцию $x(t)$ в малой окрестности произвольной точки t, а также ее значения $x(t+T)$ и $x(t-T)$ в точках $t+T$ и $t-T$ соответственно. Для расчета производной $x'(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ в точке t можно воспользоваться одним из двух выражений:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cong \frac{\Delta x^+}{\Delta t} = \frac{x(t+T) - x(t)}{T}, \quad (81)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cong \frac{\Delta x^-}{\Delta t} = \frac{x(t-T) - x(t)}{T}. \quad (82)$$

При этом приращения функции на интервале T, т.е. Δx^+ и Δx^- называются, соответственно, **прямой и обратной (возвратной) разностями**. Выражения (81) и (82) дают точные описания производных при $T \to 0$, а при любых конечных значениях интервала T приводят к появлению математических ошибок.

Метод Эйлера позволяет произвести замену производных в дифференциальных уравнениях, описывающих непрерывные динамические процессы, на приближенные рекуррентные выражения, и в рещультате получить дискретные описания процессов.

Найдем дискретную модель системы

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (83)$$

$$y'(t) = Cx(t), \quad (84)$$

воспользовавшись приближенным описанием производной через прямую разность. Полагая $t = kT$, из выражения (81) получим

$$x'(t) = \frac{x(kT+T) - x(kt)}{T}, \quad (85)$$

и подставляя (85) в (83), найдем

$$x((k+1)T) = (I + TA)x(kT) + TBu(kT). \quad (86)$$

Введем обозначение

$$I + TA = A_d,\ TB = B_d,\ C = C_d$$

и окончательно запишем дискретную модель системы (83)–(84):

$$
\begin{aligned}
x((k+1)T) &= A_d x(kT) + B_d u(kT), &(87)\\
y(kT) &= Cx(kT). &(88)
\end{aligned}
$$

2.2 Дискретизация с использованием матричной экспоненты

Метод обеспечивает получение точной дискретной модели блоков, на вход которых поступает кусочно-постоянное воздействие.

Рассмотрим объект управления (83)–(84) цифровой системы с кусочно-постоянным управляющим воздействием $u(t)$. Решение уравнения (83) для начального значения $x(0) = x_0$ имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \qquad (89)$$

При $t = kT$ получим

$$x(k) = e^{AkT}x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \qquad (90)$$

а при $t = (k+1)T$ –

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= e^{A(k+1)T}x_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \\
&= e^{AT}e^{AkT}x_0 + \int_0^{kT} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + \\
&+ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \qquad (91)
\end{aligned}
$$

Подставляя (90) в (91)и принимая во внимание постоянство $u(t)$ на интервале $[kT, (k+1)T]$, получим рекуррентное выражение

$$x(k+1) = e^{AT}x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T-\tau}Bd\tau u(k). \qquad (92)$$

Окончательно запишем дискретную модель (83)–(84) в виде разностного уравнения

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A + dx(k) + B_d u(k), &(93)\\
y(k) &= C_d x(k), &(94)
\end{aligned}
$$

где $C_d = C$,

$$A_d = e^{AT} = I + TA + \frac{T^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{T^j}{j!}A^j + \ldots,$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\tau}Bd\tau = T(I + \frac{T}{2!}A + \frac{T^2}{3!}A^2 + \ldots + \frac{T^j}{(j+1)!}A^j + \ldots)B.$$

Обратим внимание на отличие выражений для вычисления матриц A_d, B_d от полученных методом Эйлера. Нетрудно видеть, что в последнем случае для расчета

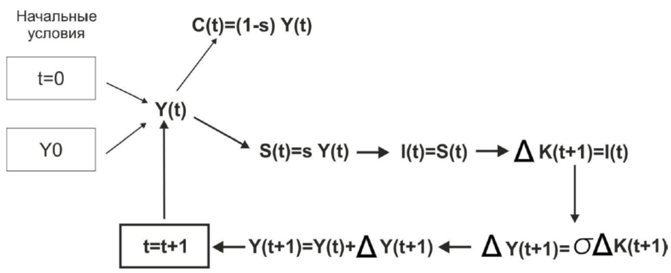

Рис. 6: Логика функционирования модели Харрода-Домара

матричной экспоненты использовалась приближенная формула $e^{AT} \cong I + TA$, чем и была обусловлена погрешность указанного метода.

Замечание 1. Для автономной модели состояние-выход, т.е. линейной системы, на вход которой не поступает внешних воздействий, проблема дискретизации с помощью матричной экспоненты решается с абсолютной точностью.

Замечание 2. Обычно кроме входного сигнала u на объект управления оказывают влияние возмущающие воздействия, которые являются сигналами непрерывного времени. При дискретизации возмущения полагаются кусочно-непрерывными, что вызывает появление методических ошибок.

3 Математические модели экономического роста

3.1 Дискретная модель Р. Харрода–Е. Домара

Модель Харрода-Домара (Harrod-Domar growth model) – динамическая модель равновесия в условиях полной занятости. Согласно этой модели для поддержания полной занятости совокупный спрос должен увеличиваться пропорционально экономическому росту. В этой модели, таким образом, подчеркивается важное значение совокупного спроса как для экономического роста, так и, соответственно, для достижения полной занятости.

Рассмотрим модель, построенную на следующих постулатах.

1. Рассматривается односекторная закрытая экономика без государства.

2. К эндогенным относятся факторы инвестиции I и прироста капитала ΔK.

3. К экзогенным факторам– $s = const$ –норма сбережения и $\sigma = const$ – средняя производительность капитала (научно-технический прогресс (НТП) отсутствует).

4. Сбережения считаются равными инвестициям, а инвестиции равны приросту капитала в следующий период времени ($I = \Delta K$).

5. Модель функционирует в соответствии с экономической логикой, представленной на рис.6

Здесь

- $Y(t)$ – объем выпуска в год t;

- $S(t)$ – сбережения в год t;
- $I(t)$ – инвестиции в год t;
- $\Delta K(t+1)$ – прирост капитала в год $t+1$;
- $\Delta Y(t+1)$ – прирост выпуска в год $t+1$;
- $Y(t+1)$ – объем выпуска в год $t+1$;
- (t) – потребление в год t.

Производство (предложение) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} S(t) &= sY(t); & (95)\\ I(t) &= S(t); & (96)\\ \Delta K(t+1) &= I(t); & (97)\\ \Delta Y(t+1) &= \sigma \Delta K(t+1). & (98) \end{aligned}$$

Из (95)–(98) имеем

$$\Delta Y(t+1) = \sigma s Y(t) \to \frac{\Delta Y(t+1)}{Y(t)} = \sigma s. \quad (99)$$

Здесь $\sigma = \frac{\Delta Y(t+1)}{\Delta K(t+1)}$ – **мультипликатор**. Дословное значение мультипликатора означает «множитель». Суть эффекта мультипликатора относительно процесса накопления состоит в том, что увеличение инвестиций приводит к увеличению темпов роста национального дохода, причем на величину большую чем первоначальный рост инвестиций.

Выражение $a = \frac{1}{\sigma} = \frac{\Delta K(t+1)}{\Delta Y(t+1)}$ называют **акселлератором**. Сущность акселератора и его прямая связь с мультипликатором состоит в следующем: первичные инвестиции и их мультипликационный эффект ведут к росту занятости, увеличению доходов населения и возрастанию спроса на потребительские товары. Для определения масштабов акселерации используют меру акселеративного воздействия изменения потребительского спроса на инвестиционный спрос. Такой мерой служит коэффициент акселерации, или просто акселератор.

Таким образом, темп прироста объема предложения в модели Харрода постоянен и равен произведению нормы сбережения на среднюю производительность капитала (мультипликатор) или частному нормы сбережения и акселератора.

Оценим, каким должны быть темпы прироста потребления и инвестиций в модели, чтобы рост предложения был равновесным и устойчивым.

Модель дополняется соотношением Кейнса:

$$Y(t) = S(t) + C(t), \quad (100)$$

где $C(t)$ – потребление. Покажем, чему должен быть равен темп прироста спроса при выполнении условий (95)–(98), (100).

Из уравнения (100) получаем:

$$S(t) = Y(t) - C(t). \quad (101)$$

Используя уравнения (95)–(98) и (101), получаем:

$$\Delta Y(t+1) = \sigma(Y(t) - C(t)) = s\sigma Y(t). \quad (102)$$

Из (102) получаем:
$$C(t) = Y(t)(1 - s). \tag{103}$$
Аналогично получаем:
$$C(t+1) = Y(t+1)(1 - s). \tag{104}$$
Вычтем из (104) выражение (103) и получим:

$$\Delta C(t+1) = \Delta Y(t+1)(1 - s). \tag{105}$$

Поделим обе части уравнения (105) на $C(t)$ получим:

$$\frac{\Delta C(t+1)}{C(t)} = \frac{(1-s)\Delta Y(t+1)}{C(t)} = \frac{(1-s)\Delta Y(t+1)}{Y(t)(1-s)} = \frac{\Delta Y(t+1)}{Y(t)} = s\sigma. \tag{106}$$

Из (106) и (103) имеем:

$$\frac{C(t+1) - C(t)}{C(t)} = \frac{(Y(t+1) - I(t+1)) - (Y(t) - I(t))}{Y(t) - I(t)} = \frac{\Delta Y - \Delta I}{Y(t) - I(t)} = \sigma s. \tag{107}$$

После преобразований получаем:

$$\Delta I = \sigma s I(t) \to \frac{\Delta I}{T(t)} = \sigma s. \tag{108}$$

Следовательно :

$$\frac{\Delta Y(t+1)}{Y(t)} = \frac{\Delta C(t+1)}{C(t)} = \frac{\Delta I(t+1)}{I(t)} = \sigma s. \tag{109}$$

Таким образом, устойчивый равновесный рост экономики при полном использовании капитала в модели Харрода обеспечивается тогда, когда темпы прироста предложения, потребления и инвестиций совпадают и равны σs.

При этом экономика растет по экспоненте с показателем степени σst. Роль государства состоит в создании условий для обеспечения равновесия между спросом и предложением, равенства инвестиций и сбережений и обеспечения полного использования инвестиций для наращивания капитала.

Попытки прогнозировать экономический рост на основе модели Харрода-Домара оказались неудачными. Исследователи пришли к выводу, что модель не объясняет основных детерминант роста.

3.2 Дискретная модель Р.Солоу-Т.Свана

Модель построена на следующих постулатах:

1. Рассматривается однопродуктовая закрытая экономика без государства.

2. Абстрагируются:

   - от индивидуальных предпочтений домашних хозяйств;
   - от наличия разных производящих секторов в экономике;
   - от существования в экономике взаимозависимостей.

3. В экономике имеется большое число одинаковых репрезентативных домохозяйств, т.е. спрос и предложение труда могут быть представлены на примере единственного домохозяйства. Домохозяйства владеют всем наличным трудом и капиталом и полностью их поставляют на рынок. При этом имеет место полная занятость.

4. В экономике имеется очень большое число одинаковых репрезентативных фирм, т.е. все фирмы характеризуются одной и той же неоклассической производственной функцией (ПФ):

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)),$$

где $Y(t)$ – доход (конечный произведенный продукт) в период t; $K(t)$ – капитал в экономике в период t; $L(t)$ – труд в экономике в период t; $A(t)$ – технология в экономике в период t (она находится в свободном доступе, т.е является неконкурентным и не исключаемым благом).

5. **Свойства неоклассической ПФ**. ПФ является дважды дифференцируемой по K и L и удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{aligned} F_K(K,L,A) &\equiv \frac{\partial F(K,L,A)}{\partial K} > 0, & F_L(K,L,A) &\equiv \frac{\partial F(K,L,A)}{\partial L} > 0, \\ F_{KK}(K,L,A) &\equiv \frac{\partial^2 F(K,L,A)}{\partial K^2} < 0, & F_{LL}(K,L,A) &\equiv \frac{\partial^2 F(K,L,A)}{\partial L^2} < 0, \\ F(0,L,A) &= F(K,0,A) = 0 & F(\infty,L,A) &= F(K,\infty,A) = \infty. \end{aligned}$$

ПФ обладает постоянной отдачей от масштаба, т.е. является линейно однородной:

$$F(\gamma K, L, A) = \gamma F(K, L, A).$$

6. Эндогенные факторы:
   - $Y(t)$ – доход (конечный продукт) в период t;
   - $C(t)$ – потребление в период t;
   - $S(t)$ – сбережение в период t;
   - $I(t)$ – инвестиции в период t;
   - $K(t)$ – капитал в период t;
   - $\Delta K(t+1)$ – прирост капитала в период $t+1$;
   - $K(t+1)$ – капитал в период $t+1$;
   - $L(t)$ – население в период t;
   - $L(t+1)$ – население в период $t+1$.

7. Экзогенные факторы:
   - $s = const$ – норма сбережения;
   - $\sigma = const$ – норма выбытия капитала;
   - $n = const$ – темп роста населения;
   - K_0 – капитал в период $t = 0$;

- L_0 – население в период $t = 0$;
- $F(K(t), L(t), A(t))$ – неоклассическая ПФ.

Основные уравнения и логика движения экономики для базового объемного варианта модели Солоу-Свана может быть представлен следующими уравнениями.

1. **Объем выпуска** (национального дохода) в любой период дискретного времени t определяется уравнением:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)). \tag{110}$$

2. **Доход** должен быть равен сумме сбережений и потребления (уравнение Кейнса):

$$Y(t) = C(t) + S(t), \tag{111}$$

где $C(t)$ – потребление в период t; S(t) – сбережения в период t.

Сбережения формируются домашними хозяйствами в экономике как некоторая постоянная доля s дохода (норма сбережения $s = const$), тогда имеем:

$$S(t) = sY(t). \tag{112}$$

Потребление из (111) и (112) будет тогда равно:

$$C(t) = Y(t) - S(t) = Y(t) - sY(t) = (1 - s)Y(t). \tag{113}$$

3.Считается, что **все сбережения идут на инвестиции в капитал**:

$$S(t) = sY(t) = I(t) = sF(K(t), L(t), A(t)). \tag{114}$$

4. **Инвестиции** в период t тратятся на восстановление капитала, который износился за этот период (капитал теряет свою стоимость с темпом $\delta \in (0; 1)$, т. е. за период t будет потеряно $\delta K(t)$) капитала) и на приобретение нового капитала на период $t + 1$.

Следовательно, имеем:

$$I(t) = \Delta K(t + 1) + \delta K(t), \tag{115}$$
$$K(t + 1) = K(t) + \Delta K(t + 1). \tag{116}$$

Из (115) и (114) получаем:

$$\Delta K(t + 1) = I(t) - \delta K(t) = sF(K(t), L(t), A(t)) - \delta K(t). \tag{117}$$

Подставляя (117) в (116), получаем основное уравнение движения капитала в модели Солоу-Свана:

$$K(t + 1) = sF(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t). \tag{118}$$

5. **Труд** (население) в модели считается растущим с постоянным темпом n:

$$L(t + 1) = L(t) + nL(t) = (1 + n)L(t), \tag{119}$$
$$L(t) = (1 + n)^t L(0) = L(0)e^{nt}. \tag{120}$$

6. **Логика движения экономики по Солоу** в дискретном времени представлена на рис.7

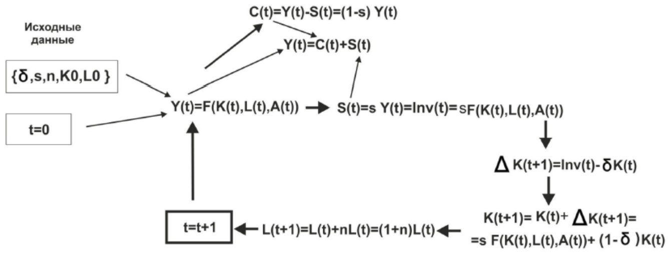

Рис. 7: Логика функционирования модели Солоу-Свана

Рассмотрим **удельный вариант модели**, в котором рассматриваются соответствующие экономические величины приведенные к одному работнику.

Разделим обе части уравнения (110) на $L(t)$ и получим:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1, A(t)\right) \text{ или } y(t) = f(k(t)), \tag{121}$$

где

- $y = \frac{Y(t)}{L(t)}$ – доход на душу населения т.е. производительность труда;
- $k = \frac{K(t)}{L(t)}$ – капиталовооруженность;
- $A(t) = 1$ – технологический прогресс отсутствует.

Аналогично из (112) (113) и (114) имеем:

$$s^* = sy(t), \tag{122}$$

$$c(t) = (1-s)y(t), \tag{123}$$

$$inv(t) = sy(t) = s \cdot f(k(t)), \tag{124}$$

где

- s^* – сбережение на душу населения;
- $c(t)$ – потребление на душу населения;
- $inv(t)$ – инвестиции на душу населения.

Из уравнений (114) и (115) имеем:

$$\frac{\Delta K_{t+1}}{L_t} = \frac{sF(K_t, L_t)}{L_t} - \delta\frac{K_t}{L_t}.$$

Так как $\Delta K_{t+1} = \frac{dK}{dt}\Delta t = \frac{dK}{dt} = K'$ и $\frac{sF(K_t,L_t)}{L_t} = sF\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = sf(k)$, получаем:

$$\frac{K'}{L_t} = sf(k) - \delta k. \tag{125}$$

Найдем

$$k' = \frac{d\frac{K}{L}}{dt} = \frac{K'L_t - L'K_t}{L_t^2} = \frac{K'}{L_t} - \frac{K_t}{L_t}\frac{L'}{L_t} = \frac{K'}{L_t} - k\frac{nL_0}{L_0}\frac{e^{nt}}{e^{nt}},$$

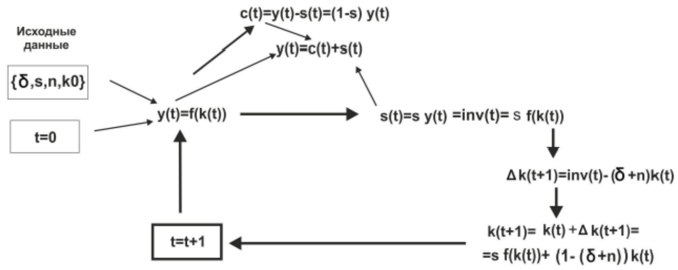

Рис. 8: Логика функционирования модели Солоу-Свана

следовательно:

$$\frac{K'}{L_t} = k' + kn, \tag{126}$$

Из (125)и (126) имеем:

$$k' = sf(k) - (n + \delta)k. \tag{127}$$

Разностный аналог уравнения (127) имеет вид:

$$\Delta k_{t+1} = sf(k_t) - (n + \delta)k_t. \tag{128}$$

Тогда имеем:

$$k_{t+1} = k_t + \Delta k_{t+1} = sf(k_t) + (1 - (n + \delta))k_t. \tag{129}$$

4. Логика движения экономики по Солоу в удельном варианте и дискретном времени представлена на рис.8

Проведем анализ модели Солоу.

3.2.1 Стационарное состояние экономики

ПФ $f(k_t)$, определяющая объем выпуска на душу населения $y(t)$ в любой момент времени t, является монотонно возрастающей функцией от капиталовооруженности k_t, т.е. имеем:

$$\infty > \frac{df}{dk} \geq 0 \text{ или } \frac{d^2 f}{dk^2} < 0. \tag{130}$$

Следовательно, $0 \leq f(k_t) < b = const$ при $0 \leq k(t) < \infty$. То есть

$$k(t) \to 0 \quad f(k(t)) \to 0 \text{ и } sf(k(t)) \to 0,$$

$$k(t) \to \infty \quad f(k(t)) \to b \text{ и } sf(k(t)) \to sb, \tag{131}$$

$$k(t) \to 0 \quad \frac{df}{dk} \to \infty \text{ и } k(t) \to \infty \quad \frac{df}{dk} \to 0. \tag{132}$$

$$\tag{133}$$

Динамика функции $k(t)$ зависит от соотношения динамик капитала и населения, если капитал растет быстрее населения, то $k(t)$ возрастает; при обратном соотношении – падает. Можно показать, что существует такое состояние, к которому стремится экономика, где $k(t) = const = k^*$, то есть $k' = 0$. В этом состоянии темп роста выпуска, потребления и капитала равны темпу роста населения. Такое состояние экономики называется **стационарным**, точка k^* – **стационарной**. Найдем стационарную точку из условия:

$$0 = sf(k^*) - (n + \delta)k^* \to k^* = \frac{sf(k^*)}{(n + \delta)}. \tag{134}$$

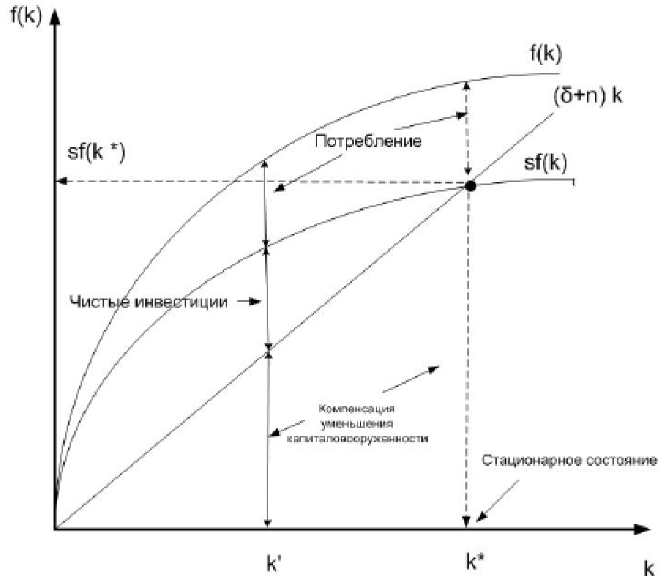

Рис. 9: Логика функционирования модели Солоу-Свана

Стационарную точку можно найти и графически (рис.9) На рис.9 представлены:

- функция $f(k)$ – объем выпуска на душу населения,
- функция $sf(k)$ – объем сбережений на душу населения,
- функция $(n+\delta)k$, характеризующая объем инвестиций на душу населения необходимых для обеспечения постоянства капиталовооруженности.

Точка пересечения $sf(k)$ и $(n+\delta)k$ представляет собой стационарную точку k^*. В интервале $(0;\ k^*]$ $sf(k) > (n+\delta)k$, т.е. инвестиций в экономике больше, чем это необходимо для обеспечения постоянства капиталовооруженности.

Рассмотрим экономику в точке $k' \in (0, k^*]$ и $k' < k^*$. В этой точке величина $sf(k') - (n+\delta)k'$ представляет собой чистые инвестиции на душу населения, которые увеличивают капиталовооруженность, а величина $f(k') - sf(k')$ характеризует объем потребления на душу населения. В стационарной точке k^*, $sf(k^*) - (n+\delta)k^* = 0$ т.е чистые инвестиции равны нулю, а объем потребления равен $f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - (n+\delta)k^*$.

Докажем **существование стационарной точки**. Рассмотрим точку в окрестности начала координат $k_n = 0 + \epsilon = \epsilon$, где $\epsilon > 0$ положительная бесконечно малая величина, тогда $sf(k_n) = s \cdot \epsilon \frac{df}{dk}$ и $\epsilon(n+\delta)$ из (132) имеем $\frac{df}{dk} > (n+\delta)$, следовательно:

$$sf(k_n) > k_n(n+\delta).$$

Рассмотрим точку в окрестности конца координат $k_k = \hat{k}_k + \epsilon = \infty - \epsilon + \epsilon$ тогда из (131) $sf(k_k) = sf(\hat{k}_k) + s\epsilon\frac{df}{dk} = sb + s\epsilon\frac{df}{dk}$ и $\hat{k}_k(n+\delta) + \epsilon(n+\delta)$ из (132) имеем $\frac{df}{dk} < (n+\delta)$ и $sb < \hat{k}_k(n+\delta)$, следовательно:

$$sf(k_k) < k_k(n+\delta).$$

Таким образом, так как функция $f(k(t))$ в интервале $(0, \infty)$ монотонно возрастает, является гладкой, непрерывной и удовлетворяет условиям (130) и (131) и $k(n+\delta)$ – линейно растущая функция, то в этом интервале обязательно выполняется условие:

$$sf(k^*) = k^*(n+\delta). \tag{135}$$

Это эквивалентно существованию стационарной точки.

3.2.2 Золотое правило накопления капитала

Из (134) видно, что стационарное состояние экономики зависит от нормы сбережения s, а следовательно, от нормы сбережения зависит и потребление на душу населения в стационарной точке. Как изменяется стационарное потребление на душу населения при изменении нормы сбережения и какова норма сбережения, которая максимизирует стационарное потребление. Из (123) имеем:

$$c(k^*(s)) = f(k^*(s)) - sf(k^*(s)). \tag{136}$$

Из (135) имеем:

$$c(k^*(s)) = f(k^*(s)) - k^*(s)(n+\delta). \tag{137}$$

Тогда условие максимума потребления имеет вид:

$$\frac{dc(k^*(s))}{ds} = \frac{d[f(k^*(s) - k^*(s)(n+\delta))]}{ds} = \frac{df(k^*(s))}{dk}\frac{dk^*(s)}{ds} - (n+\delta)\frac{dk^*(s)}{ds} = 0 \to \frac{df(k^*(s))}{dk} = (n+\delta). \tag{138}$$

Стационарная капиталовооруженность получаемая из уравнения (138) называется капиталовооруженностью, соответствующей золотому правилу и обозначается k^g

$$\frac{df(k^g)}{dk} = (n+\delta). \tag{139}$$

Уравнение (139) определяющее стационарную капиталовооруженность максимизирующую стационарное потребление называется золотым правилом накопления капитала. Из (135) и (139) имеем норму сбережения, обеспечивающую максимальное потребление на душу населения:

$$s^g f(k^g) = k^g(n+\delta) \to s^g = \frac{k^g(n+\delta)}{f(k^g).} \tag{140}$$

Величина максимального стационарного потребления определяется из уравнения:

$$c^g = f(k^g) - (n+\delta)k^g. \tag{141}$$

Проиллюстрируем золотое правило накопления капитала графически (рис. 10). Капиталовооруженность в стационарном состоянии экономики k^g соответствует золотому правилу, так как определяется нормой сбережения s^g, которая задает максимальное стационарное потребление на душу населения c^g. Уменьшение нормы сбережения $s^2 < s^g$ и ее увеличение $s^1 > s^g$ уменьшают стационарное потребление на душу населения, т.е. $c^2 < c^g$ и $c^1 < c^g$. При этом угол наклона касательной к функции выпуска $f(k)$ в точке k^g равен $n+\delta$, что эквивалентно условию (139).

При переходе экономики из стационарного состояния с нормой сбережения с s^1 к стационарному состоянию с нормой s^g $(s^1 > s^g)$ увеличивается соответственно стационарное потребление на душу населения с уровня c^1 до уровня c^g. Но процесс этот

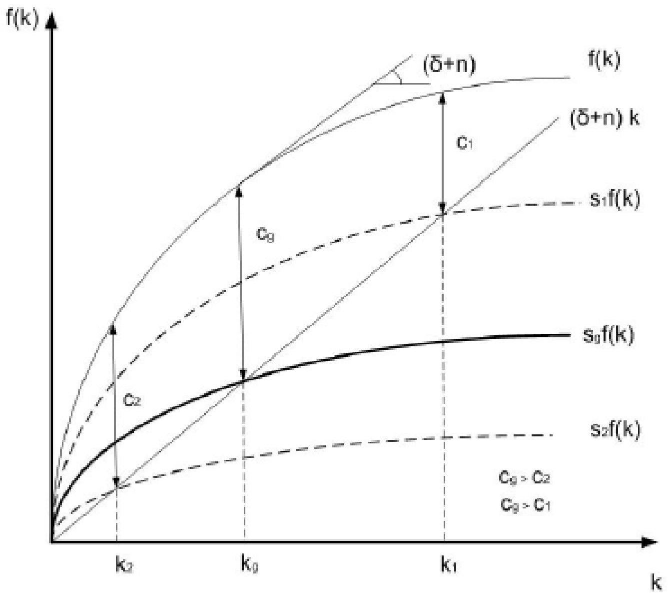

Рис. 10: Золотое правило накопления капитала

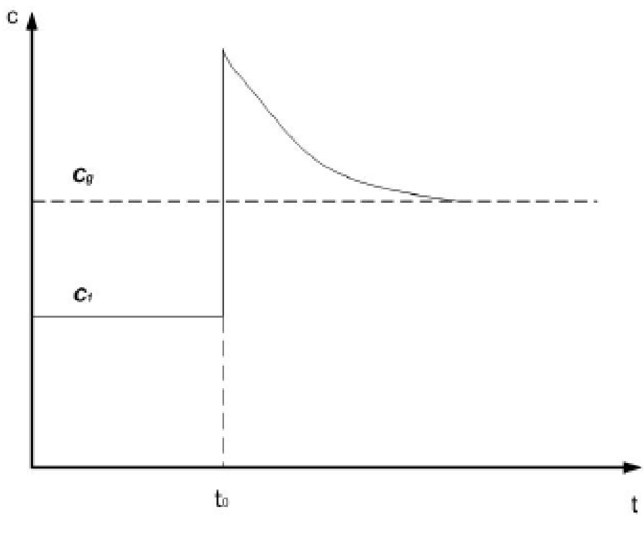

Рис. 11: Переход экономики из стационарного состояния с нормой сбережения с s^1 к стационарному состоянию с нормой s^g

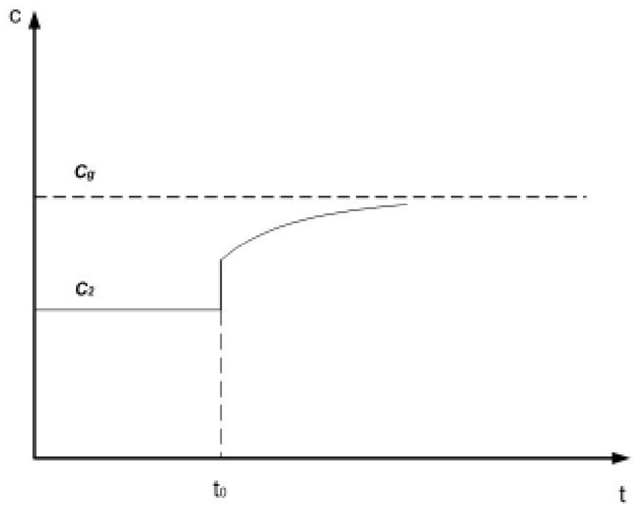

Рис. 12: Переход экономики из стационарного состояния с нормой сбережения с s^2 к стационарному состоянию с нормой s^g

не одномоментный, а имеет следующий вид (рис.11). То есть экономика, имеющая ному сбережения больше чем s^g сберегает слишком много и распределение ресурсов в этом случае является динамически неэффективным.

Если норма сбережения в экономике s^2 и меньше чем s^g, то увеличив ее до уровня s^g, мы увеличиваем стационарную капиталовооруженность с уровня k^2 до уровня k^g, но в переходный период потребление на душу населения остается ниже c^g (рис.12). Невозможно однозначно определить эффективно распределяются ресурсы или нет, потому что нельзя оценить, важнее текущее состояние или будущее.

3.2.3 Экономический рост: долгосрочная динамика и переходный период

В стационарном состоянии капиталовооруженность постоянна, следовательно, постоянна и производительность труда. Таким образом, долгосрочный рост выпуска не зависит от экзогенных параметров нормы сбережения и нормы амортизации, а зависит только от темпов роста населения. Однако эти экзогенные параметры влияют на производительность труда в переходный период при движении экономики к стационарному состоянию.

Рассмотрим, чем определяется темп роста капиталовооруженности на равновесной траектории. Поделим обе части уравнения (127) на k получим уравнение динамики темпа роста капиталовооруженности:

$$\frac{k'}{k} = \frac{sf(k_t)}{k} - (n + \delta). \tag{142}$$

Изобразим динамику экономики в модели Солоу, описываемую уравнением (142) графически (рис. 13). Как видно $\frac{sf(k_t)}{k}$ является убывающей функцией k. Расстояние по вертикали между $\frac{sf(k_t)}{k}$ и $n+\delta$ является темпом роста капиталовооруженности $\frac{k'}{k}$ в точке пересечения (в стационарной точке k^*) $\frac{k'}{k} = 0$. Слева от стационарной точки $\frac{k'}{k} > 0$, а справа $\frac{k'}{k} < 0$. Динамика темпа роста производительности труда аналогична динамике темпа роста капиталовооруженности. Продифференцируем уравнение

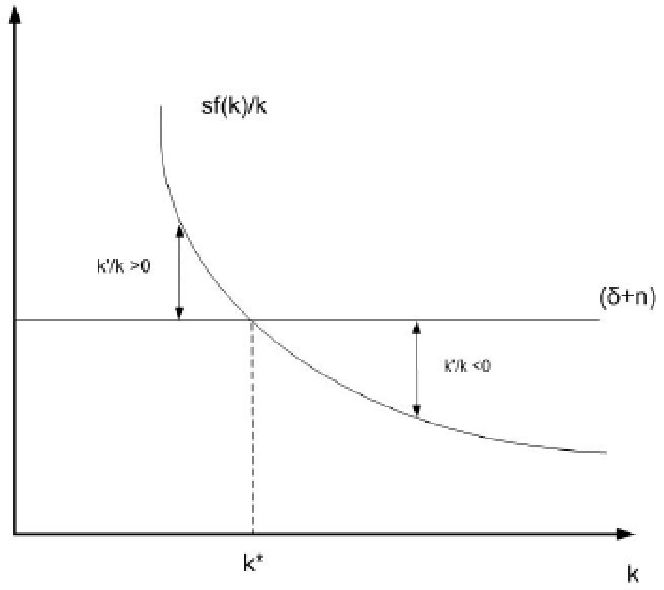

Рис. 13: Динамика экономики в модели Солоу

(121) имеем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dk}\frac{dk}{dt} \text{ или } y' = f'k'. \tag{143}$$

Разделим обе части уравнения (143) на y и получим:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'}{f}k' = \frac{f'k}{f}\frac{k'}{k} = s_k\frac{k'}{k}. \tag{144}$$

Анализируя стационарное состояние, можно сделать следующее заключение, что стационарное состояние зависит от нормы сбережения, нормы амортизации и темпа роста населения.

Изменение нормы сбережения. При повышении нормы сбережения с s_1 до s_2 кривая $sf(k)$ смещается вверх и стационарная точка перемещается из k^1 в k^2, т.е. стационарная капиталовоору- женность возрастает (рис.14). Как видно из рис.13 при росте нормы сбережения темп роста капиталовооруженности скачком возрастает и становится выше темпа роста населения, но по мере роста капиталовооруженности темп ее роста постепенно снижается и точке пересечения $(n + \delta)$ и $s_2 f(k)$, а k^2 становится равной нулю.

Таким образом, в долгосрочной перспективе повышение нормы сбережения не влияет на темпы роста капиталовооруженности и выпуска, но влияет на темпы роста в процессе движения к новому стационарному состоянию.

Изменение темпов роста населения.При повышении темпов роста населения с n_1 до n_2 стационарная капиталовооруженность уменьшается с k^1 до k^2, а темпы ее роста скачком уменьшаются до некоторого отрицательного значения. Экономика начинает двигаться так, что капиталовооруженность начинает падать, а темп ее роста увеличиваться. Это происходит до тех пор пока не будет достигнута новая стационарная точка k^2, здесь темп роста капиталовооруженности становится равным нулю (рис.15). Аналогичную динамику демонстрирует и производительность труда.

Если имеется группа стран с одинаковыми нормами сбережения и амортизации капитала, темпом роста населения и одинаковыми технологиями, то они имеют одну

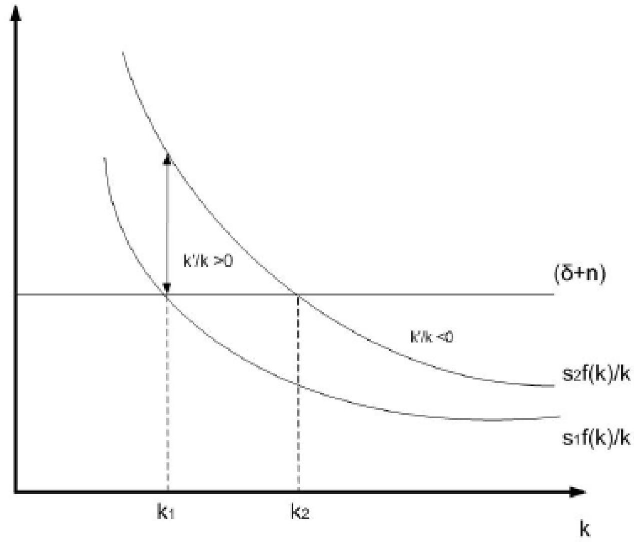

Рис. 14: Повышение нормы сбережения

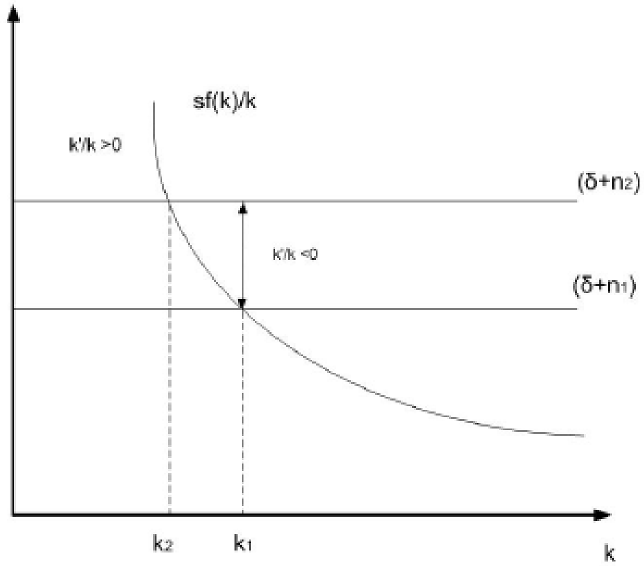

Рис. 15: Изменение темпов роста населения

и ту же стационарную капиталовооруженность. При этом каждая из стран может иметь различные текущие значения капиталовооруженности. Согласно модели Солоу, чем дальше отстоит текущие значение капиталовооруженности от стационарного, тем более высокие темпы ее роста будут наблюдаться. Следовательно, отстающие страны будут догонять передовые, т.е должна иметь место абсолютная конвергенция.

Тем не менее, на практике этого не наблюдается, так как разные страны имеют разные нормы сбережения и амортизации, темпы роста населения и технологии, а значит и разные стационарные точки. При этом, те страны текущие значение капиталовооруженности которых дальше отстает от их стационарных значений, должны развиваться быстрее, т.е. имеет место относительная конвергенция.

3.2.4 Модель Солоу с трудосберегающим техническим прогрессом (AL-модель)

До сих пор в модели технология считалась неизменной, следовательно, капиталовооруженность и производительность труда в долгосрочной перспективе также являются неизменными, что противоречит экономическим реалиям. Для того, чтобы учесть тот факт, что технологии под влиянием НТП постоянно меняются, необходимо учитывать влияние НТП в модели. Учесть это влияние можно разными способами, что приводит к разным типам НТП: нейтральный, капиталосберегающий и трудосберегающий.

Нейтральный НТП позволяет произвести продукцию при меньших затратах капитала и труда:

$$Y = F(K, L, A) = AF(K, L). \tag{145}$$

Капиталосберегающий НТП увеличивает выпуск за счет повышения эффективности использования капитала:

$$Y = F(K, L, A) = F(AK, L). \tag{146}$$

Трудосберегающий НТП увеличивает выпуск за счет повышения эффективности использования труда:

$$Y = F(K, L, A) = F(K, AL). \tag{147}$$

Если считать НТП имеет постоянный темп роста:

$$\frac{dA}{dt}/A = g, \tag{148}$$

то только трудосберегающий НТП обеспечивает существование стационарного состояния экономики.

Запишем условие равновесия с учетом трудосберегающего НТП:

$$\frac{dK}{dt} + \sigma K_t = sF(K_t, A_t, L_t). \tag{149}$$

Перепишем условие (149) для одного эффективного работника:

$$\frac{\frac{dK}{dt}}{A_t L_t} + \frac{\sigma K_t}{A_t L_t} = \frac{sF(K_t, A_t, L_t)}{A_t L_t} = sF\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, 1\right). \tag{150}$$

Введем обозначения $k_A = \frac{K_t}{A_t L_t}$ и $y_A = \frac{Y_t}{A_t L_t}$. Тогда получаем:

$$\frac{dk_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}AL - K\frac{d(AL)}{dt}}{(AL)^2} = \frac{\frac{dK}{dt}AL - AK\frac{dL}{dt} - LK\frac{dA}{dt}}{(AL)^2} = \frac{\frac{dK}{dt}}{AL} - \frac{\frac{dL}{dt}}{L}\frac{K}{AL} - \frac{\frac{dA}{dt}}{A}\frac{K}{AL}$$
$$= \frac{\frac{dK}{dt}}{AL} - \frac{K}{AL}\left(\frac{\frac{dL}{dt}}{L} + \frac{\frac{A}{dt}}{A}\right) = \frac{\frac{dK}{dt}}{AL} - k_A(n+g). \qquad (151)$$

Отсюда

$$\frac{\frac{dK}{dt}}{AL} = \frac{dk_A}{dt} + k_A(n+g), \qquad (152)$$

подставляя (152) в (150) получаем:

$$\frac{dk_A}{dt} + k_A(n+g) + \sigma k_A = sf(k_A).$$

Следовательно имеем:

$$\frac{dk_A}{dt} = sf(k_A) - k_A(n+\sigma+g). \qquad (153)$$

Уравнение (153) описывает накопление капитала при наличии трудосберегающего НТП. Стационарное состояние при котором $\frac{dk_A}{dt} = 0$ определяется из условия:

$$sf(k_A^*) = k_A^*(n+\sigma+g). \qquad (154)$$

В стационарном состоянии капитал на одного эффективного работника k_A постоянен, следовательно, $y_A = f(k_A)$ и $c_A = (1-s)y_A$ тоже постоянны. А так как

$$k_A = \frac{k}{A} \rightarrow k = Ak_A,$$

то капиталовооруженность, производительность труда y и потребление с в стационарном состоянии должны расти с темпом g НТП. При этом запас капитала K и уровень выпуска Y в стационарном состоянии растут с темпом $(n+g)$. Норма сбережения, норма амортизации и производственная функция влияют только на траекторию перехода к стационарному состоянию, но не влияют на темпы роста в стационарном состоянии.

Таким образом, темп роста экономики выпуск на душу населения при полной занятости в модели Солоу полностью определяется темпом роста НТП. Но из этой модели остается полностью непонятным, чем определяется темп самого НТП.

4 Модели потенциального выпуска для основных фондов

4.1 Понятия основного капитала и основных фондов

Понятие основного капитала возникло в практике государственной статистики РФ в связи с переходом к рыночной экономике и внедрением системы национального счетоводства.

Основные фонды (основной капитал) – это часть национального богатства, созданная в процессе производства, которая длительное время неоднократно или постоянно используется в неизменной натурально-вещественной форме в экономике и постепенно переносит свою стоимость на создаваемые продукты и услуги.

В практике учета к основным фондам относят материальные и нематериальные объекты со сроком службы не менее года и стоимостью выше определенной величины, установленной в зависимости от уровня цен на продукцию капиталосоздающих отраслей.

В **состав материальных основных фондов** включают: здания, сооружения, машины и оборудование, измерительные и регулирующие приборы и устройства, жилища, вычислительную технику и оргтехнику, транспортные средства, инструмент, производственный и хозяйственный инвентарь, рабочий, продуктивный и племенной скот, многолетние насаждения и прочие виды материальных основных фондов.

К **нематериальным основным фондам** (нематериальным активам) относят: компьютерное программное обеспечение, базы данных, оригинальные произведения развлекательного жанра, литературы и искусства, наукоемкие промышленные технологии, прочие нематериальные основные фонды, которые являются объектами интеллектуальной собственности и использование которых ограничено установленными для них правами владения.

По видам основные фонды (ОФ) делятся на следующие группы:

- здания;
- сооружения;
- машины и оборудование;
- транспортные средства.

Машины, оборудование и транспортные средства образуют активную часть ОФ, т.н. **производственные мощности**.

Для описания основных фондов используется множество характеристик, каждая из которых играет специфическую роль в расчете экономического роста.

В дальнейшем будем использовать следующие характеристики ОФ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. ***Полная первоначальная стоимость*** *– это стоимость основных фондов в ценах, учитывающихся при их постановке на баланс.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. ***Остаточная первоначальная стоимость*** *ОФ – это первоначальная стоимость основных фондов за вычетом износа на дату определения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. ***Восстановительная стоимость*** *ОФ – это расчетные затраты на воссоздание в современных условиях их точной копии с использованием аналогичных материалов и сохранением всех эксплуатационных параметров.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. ***Остаточная восстановительная стоимость*** *ОФ – это стоимость основных фондов, не перенесенная на создаваемый продукт. Определяется по результатам переоценки ОФ как разница между полной восстановительной стоимостью ОФ м денежной оценкой изношенности инвентарных объектов по данным бухгалтерского учета.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. ***Балансовая стоимость*** *ОФ – это стоимость основных фондов на момент постановки на учет в бухгалтерском балансе. Это смешанная оценка, т.к. часть объектов числится на балансах по восстановительной стоимости на момент последней переоценки, а ОФ, введенные после данного момента, читываются по первоначальной стоимости.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. ***Текущая стоимость*** *ОФ – это стоимость основных фондов на текущий момент времени с учетом движения основных фондов.*

Основными показателями, характеризующими движение основных фондов, являются поступление и выбытие ОФ.

Поступление ОФ включает фонды, принятые на баланс предприятия в результате

- приобретения, сооружения или изготовления;
- внесения учредителями в счет их вкладов в уставный капитал;
- получения по договору дарения и в иных случаях безвозмездного получения;
- других поступлений.

Из общей суммы поступивших фондов выделяют введенные в отчетном периоде новые ОФ.

Выбытие ОФ может происходить в результате их продажи, списания в случае их морального или физического износа, передачи в виде вклада в уставный капитал других организаций, ликвидации при авариях, передачи по договорам дарения, передачи в казну и по другим причинам. Из общего объема выбытия выделяют данные о ликвидированных за год ОФ.

Индексы физического объема ОФ показывают рост объема ОФ в сопоставимых ценах. Оценки физических объемов ОФ, т.е. объемов, измеренных в сопоставимых ценах, необходимы и для соизмерения объема и динамики фондов с физическим объемом и динамикой продукции, а также с другими факторами производства.

Между продукцией и ОФ существуют прямые и обратные связи, продукция и ее распределение являются источниками инвестиций в основные фонды. Поэтому соответствующие элементы ВВП должны быть тождественны элементам воспроизводства физического объема ОФ. Только в таком случае имеют строгий смысл фондоотдача, фондовооруженность и другие показатели, связывающие объем ОФ с факторами производства и выпуском продукции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. ***Степень (коэффициент) износа*** *– отношение накопленного к определенной дате износа имеющихся основных фондов (разницы их полной учетной и остаточной балансовой стоимости) к полной учетной стоимости этих основных фондов на ту же дату в процентах.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. ***Износ ОФ*** *– это частичная или полная утрата ОФ потребительских свойств и стоимости в процессе эксплуатации под воздействием сил природы и вследствие технического прогресса.*

Износ выражается как в учащении поломок, снижении выпуска, так и в полном фактическом выходе из строя ОФ. Нормы и методы начисления износа определяются порядком бухгалтерского, налогового и статистического учета.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. ***Нормативный срок службы*** *– срок физического и морального износа ОФ.*

В течение нормативного срока эксплуатации должны быть полностью возмещены финансовые ресурсы, инвестированные в ОФ. По истечении нормативного срока службы начисление амортизации прекращается. Прекращение начисления амортизации по истечении нормативного срока службы не означает автоматического прекращения эксплуатации полностью амортизированного объекта ОФ. Напротив, фактический срок эксплуатации основных фондов может значительно превышать нормативный.

4.2 Модели основного капитала

При моделировании основного капитала важнейшими являются следующие проблемы: описание запаса капитала и описание движения капитала.

Концепции запаса капитала. В неоклассической теории рассматриваются три концепции запаса капитала:

- капитал как фонд жизненно необходимых благ;
- капитал как набор количеств гетерогенных капитальных благ;
- капитал как стоимостная величина.

«Количество капитала» K, доступного экономике в начале производственного периода, может быть задано в стоимостных величинах, представляющих определенное количество входящих в него товаров.

Сторонники концепции капитала «*как фонда жизненно необходимых благ*» стремились выражать запас капитала в экономике в терминах потребительских благ (например, через зерно, железо и т.д.). При этом капитал рассматривался как дополнение к природным факторам производства – труду и земле, используемым в течение периода производства первоначальных расходов на услуги данных факторов до момента выпуска потребительских благ.

Это понятие соответствует точке зрения, что капитал происходит от инвестирования прошлых сбережений, которые в свою очередь подразумевают воздержание от потребления. Однако непреодолимы трудности, связанные с поисками физической меры реального капитала в терминах фонда жизненно необходимых благ. Капитал в натуральном измерении не является независимым от переменных, для определения которых он, в т.ч. и предназначен. Например, при изменении ставки процента обычно будут изменяться и относительные цены и, соответственно, также будут изменяться пропорции потребительских благ, через которые выражается капитал.

Сторонники концепции капитала «*как вектора гетерогенных капитальных благ*» считают, что запас капитала в экономике задан в терминах количества специфических капитальных благ. Причем, вектором капитальных благ может быть любой вектор, независимый от остальных параметров модели. Норма чистой прибыли i-го капитального блага r_i равна:

$$r_i = \frac{\pi_i - h_i P_i}{P_i},\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

где π_i – цена услуги; P_i – цена i-го капитального блага; h_i – заданная норма амортизации.

По Вальрасу необходмо, чтобы при равновесии норма чистого дохода была одинаковой для всех капитальных благ, т.е.

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_l = r,$$

где r – общая норма чистого дохода.

Кроме того, в соответствии с «законом издержек производства» равновесная цена на производство капитального блага i k_i равна цене капитального блага:

$$k_i = P_i,\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда в равновесии

$$r = \frac{\pi_i - h_i k_i}{k_i},\ i = 1, 2, \ldots l.$$

Отсюда стоимость i-го капитального блага:

$$k_i = \frac{\pi_i}{r_i + h_i}.$$

Однако нет причин полагать, что при произвольно заданном векторе собственно капитальных благ требования единой нормы чистого дохода и соблюдение равенства между ценой продажи и затратами на производство для всех капитальных благ могут быть одновременно удовлетворены.

В рамкаж третьей концепции капитала «*как стоимостной величины*» физический состав капитала является частью равновесного решения задачи стоимости и распределения, а не задачи поиска отдельных его составляющих. Это т.н. концепция агрегированного капитала. При этом подходе капитал рассматривается наравне с рынками труда и земли.

Модель экономического роста Р. Солоу базируется на неоклассической концепции агрегированного капитала и законе убывающей отдачи. Поскольку экономический рост требует растущих капитальных затрат, а возможности использования дополнительной рабочей силы ограничиваются ростом ставки заработной платы, убывающая отдача капитала в модели компенсируется повышением нормы накопления, необходимой для устойчивой траектории роста. При этом выпуск на работника (производительность труда) рассматривается исключительно как функция производительности капитала.

Поскольку капитал в отличие от труда совершенно неоднороден в физическом смысле, агрегировать его для введения в модель можно лишь в стоимостной форме, причем стоимость капитала следует определять независимо от цены на его услуги, т.е. нормы прибыли.

4.2.1 Модели движения основного капитала (основных фондов)

Наиболее популярная модель движения основного капитала, используемая в большинстве посткейнсианских и неоклассических моделей, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dK(t)}{dt} &= K_{in}(t) - K_{out}(t); && (155)\\
K_{in}(t) &= I(t) = sY(t); && (156)\\
K_{out}(t) &= \beta K(t); && (157)\\
Y(t) &= F(K, X, t), && (158)
\end{aligned}$$

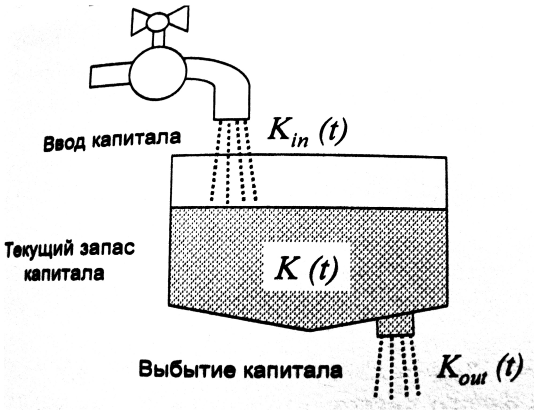

Рис. 16: Модель движения основного капитала

где $K(t)$ – текущий запас основного капитала как стоимостная величина (ресурс); $K_{in}(t)$ – ввод капитала в результате инвестиций $I(t)$ в ОК; $K_{out}(t)$ – выбытие основного капитала; β – норма выбытия; $Y(t)$ – текущий выпуск; F – производственная функция; X – другие факторы.

При этом капитал рассматривается как гомогенный фактор, предельный продукт которого равен прибыли:

$$\frac{\partial Y}{\partial K}p = r, \tag{159}$$

где p – цена единицы товара.

В дискретном времени модель (155)–(158) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{i+1} &= K_i + K_{i,in} - K_{i,out}; \\ K_{i,in} &= I_i = sY_i; \\ K_{i,out} &= \beta K_i; \\ Y_i &= F(K_i, X_i), \end{aligned}$$

где i – номер года.

В категориях системной динамики Д. Форрестера модель (155)–(157) является моделью изменения запаса (рис. 16).

В посткейнсианских моделях инвестиции, увеличивающие объем ОФ, финансируются за счет сбережений, представляющих собой фиксированную долю валовой добавленной стоимости. При этом считается, что сбережения инвестируются полностью:

$$I = S = sY, \tag{160}$$

где S – сумма сбережений, s – норма сбережения.

Можно рассмотреть и более сложную модель инвестиционного процесса, согласно которой трансформация выпуска в инвестиции представляется следующим образом:

$$I_t = (n_1 \cdot n_2 \cdot n_3)Y_t = sY_t, \tag{161}$$

где I_t – инвестиции в основной капитал в периоде t; n_1 – доля валовых сбережений в ВВП; n_2 – доля валовых накоплений в валовых сбережениях; n_3 – доля инвестиций в основной капитал в накоплениях; Y_t – выпуск в периоде t; s – текущая норма инвестиций в основной капитал.

Норма выбытия β в уравнении (157) обычно трактуется как норма аморизации

$$\beta = \frac{1}{T_0}, \tag{162}$$

где T_0 – продолжительность жизни вновь вводимого капитального блага.

Несмотря на то, что подобная трактовка выбытия основного капитала математически проста, с экономической точки зрения она не совсем корректна. В частности, она не учтывает процент, накапливающийся на амортизационные отчисления с момента поступления капитального блага в производство и до его замены. Можно рассмотреть т.н. «амортизацию вследствие испарения» (или «амортизацию вследствие радиоактивного распада»). Амортизаця подобного вида рассчитывается по формуле

$$A = (\beta + r) \cdot P, \tag{163}$$

где P – цена нового капитального блага; r – норма прибыли.

Тем не менее, в модели выбытия капитала (157) норму выбытия β нельзя отождествлять с нормой амортизации, поскольку в этой модели величина текущего запаса капитала K не равна его первоначальной стоимости.

Рассмотрим более сложную модель выбытия ОФ, предложенную Н. Оленевым:

$$K_{out}(t) = \beta K(t) - u(t) \cdot K(t), \tag{164}$$

где $u(t) \geq 0$ – темп демонтажа оборудования.

Последнее слагаемое учитывает списание стоимости демонтированной мощности.

В модели Р. Солоу модель движения основного капитала (155)–(157) дается в пересчете на одного занятого путем введения показателя «капиталовооруженности труда»:

$$k = \frac{K}{L}, \tag{165}$$

где L – численность занятых.

Модель прироста основного капитала записывается следующим образом:

$$\Delta k = s \cdot F(k) - (n + \beta) \cdot k, \tag{166}$$

где $F(k)$ – производственная функция; n – темп роста численности населения; β – норма выбытия капитала.

В модели Р. Солоу рассматриваются два вида технического прогресса: трудосберегающий и капиталосберегающий. Каждый вид НТП моделируется множителем при соответствующем ресурсе в модели выпуска (158):

$$Y = F(e^{at}K, e^{bt}L), \tag{167}$$

где a – темп капиталосберегающего НТП; b – темп трудосберегающего НТП.

С учетом различных видов НТП модель (167) преобразуется в следующий вид:

$$\Delta k = s \cdot F(k) - \left(n + \beta + b + a \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right), \tag{168}$$

где α – коэффициент эластичности замещения труда капиталом.

Капитал и труд в модели Р. Солоу считаются полностью взаимозаменяемыми; капитал представляется в виде пластичной однородной массы, которая может свободно

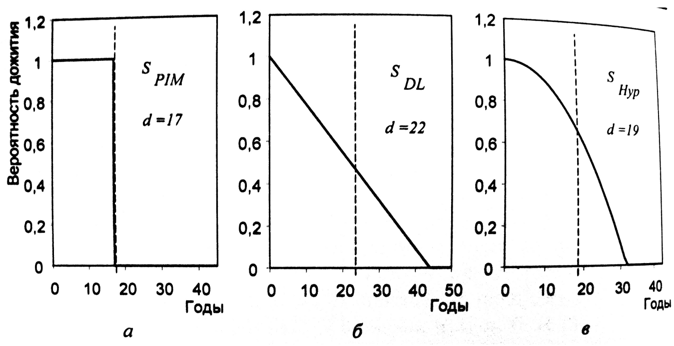

Рис. 17: Модели функции дожития: а– прямоугольная, б – линейная, в – гиперболическая

приспосабливаться под любые потребности. Однако многие экономисты справедливо оценили эту концепцию как нереалистичную. Капитал по своему вещественному составу неоднороден, в особенности в современных условиях омертвления гигантских капиталов в накопленных средствах производства, и не обладает свойствами гибкого приспособления к быстро меняющейся рыночной конъюнктуре. Машины, оборудование, технологические линии, сырье настолько специфичны в каждом случае, что употребить их соответственно другим нуждам практически оказывается либо невозможным, либо крайне затруднительным.

Отметим еще один существенный недостаток модели (155)–(157). В ней никак не учитывается **возрастная структура** ОФ, которая существенно влияет и на выпуск, и на выбытие капитала. Например, для двух одинаковых станков, имеющих одну и ту же нормативную производительность, но разную остаточную стоимость в связи с разным возрастом, по модели Р. Солоу будем иметь разный выпуск. Таким образом, отсутствие в модели возрастной структуры не позволяет учитывать износ капитала, от величины которого зависит интенсивность его выбытия β. В этом смысле коэффициент β должен быть переменной величиной:

- если ввод капитала превышает его выбытие ($\Delta K > 0$), то капитал молодеет (средний возраст уменьшается) и β должен падать;
- если выбытие капитала превышает его ввод ($\Delta K < 0$), то капитал стареет и β должен возрастать.

4.2.2 Модели, учитывающие возрастную структуру

Рассмотрим модели, позволяющие учитывать срок службы и распределение основных фондов по возрастам. Для основных фондов стоимостью I_t, введенных в i-м году, текущая стоимость определяется по следующей формуле:

$$K_i(t) = S(t, d, \gamma)I_i, \tag{169}$$

где $S(t, d, \gamma)$ – функция дожития, показывающая вероятность «невыбытия» данных ОФ в момент времени t; d – среднее время жизни ОФ; γ – параметр конкретной функции дожития.

На рис. 17 приведены примеры функций дожития.

Текущая стоимость ОФ с учетом ранее введенных ОФ рассчитывается по следующей формуле:

$$K_\Sigma(t) = \sum_{i=t_0}^{t} S(t-i+1, d, \gamma) I_i, \tag{170}$$

где t_0 – год, начиная с которого учитывались значения вводов.

В свою очередь, выбытие основных фондов вычисляется следующим образом:

$$K_{out}(t) = K_\Sigma(t+1) - K_\Sigma(t) + I(t). \tag{171}$$

4.3 Моделирование потенциальных характеристик основных фондов

Для описания потенциальных возможностей ОФ сектора экономики будем использовать две характеристики:

1. потенциальный выпуск сектора по ОФ (V_K^{pot});

2. производственный потенциал (или коротко – потенциал) ОФ (P_K^V).

Как было отмечено выше **потенциальный выпуск** сектора по основным фондам V_K^{pot} показывает возможный выпуск сектора за год при нормативной загрузке мощностей и совершенной организации производства и при условии, что другие ресурсы имеются в неограниченном количестве, т.е. не являются лимитирующими факторами. **Производственный потенциал** ОФ P_K^V показывает суммарнй выпуск продукции, который может быть полученизэтих ОФ за период времени, начиная с сегодняшнего момента (t_0) и до момента их полного износа ($t_0 + T_0$) при их полной загрузке в течение всего срока их эксплуатации без реанимирующих воздействий и дополнительных инвестиций, т.е.

$$P_K^V = \sum_{t=t_0}^{T_0} V_K^{pot}(t). \tag{172}$$

В случаях, когда в качестве выпуска рассматривается добавленная стоимость Y, будем использовать следующие обозначения для потенциальных характеристик ОФ:

$$Y_K^{pot},\ P_K^Y.$$

Обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ моменты ввода в действие ОФ за счет инвестиций прошлых периодов. Тогда изменение потенциального выпуска по ОФ в этих точках можно представить в виде следующей рекуррентной записи:

$$V_K^{pot}(t_{i+1}) = V_K^{pot}(t_i) + \Delta V_K^{in}(t_{i+1}) - \Delta V_K^{out}(t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{173}$$

где $\Delta V_K^{in}(t_{i+1})$ – прирост потенциального выпуска ОФ в момент времени t_{i+1} в результате ввода новых ОФ за счет инвестиций прошлых периодов; $\Delta V_K^{out}(t_i, t_{i+1})$ – падение потенциального выпуска ОФ в интервале (t_i, t_{i+1}) за счет износа.

Капитал выбывает, перенося свою стоимость на выпускаемыю продукцию. Для исследования процессов ввода и выбытия ОФ введем в рассмотрение **коэффициент**

капиталопередачи k_e, под которым понимаются затраты капитала, переносимые на единицу выпускаемой продукции:

$$k_e = \frac{K_0}{P_K^V}, \tag{174}$$

где P_K^V – стоимость выпущенной продукции на данных основных фондах за весь период их жизни – с момента ввода в эксплуатацию до их полного износа; K_0 – первоначальная стоимость ОФ.

Коэффициент капиталопередачи имеет сходный смысл с коэффициентами материальных и трудовых затрат, которые рассчитываются на единицу продукции.

Не следует путать данный коэффициент с нормой амортизации, которая по смыслу также отражает перенос стоимости ОФ на готовую продукцию, но рассчитывается в процентах к первоначальной (восстановительной) стоимости объекта амортизируемого имущества и не зависит от выпуска продукции.

Введенный коэффициент капиталопередачи также отличается от широко используемого в неоклассических и посткейнсианских моделях понятия «капиталоемкость». **Капиталоемкость** показывает объем основного капитала, необходимого для выпуска продукции, товаров, услуг стоимостью в 1 денежную единицу. Капиталоемкость для конкретного отчетного года определяется путем деления стоимости ОФ на объем продукции в денежном выражении, выпускаемой за один год на этих фондах:

$$k = \frac{K_0}{V}. \tag{175}$$

Например, если стоимость ОФ предприятия составляет 10 млн.руб. и в год оно выпускает продукцию стоимостью в 2 млн.руб., то капиталоемкость продукции равна $k = 10/2 = 5$, т.е. 5 рублей основного капитала на 1 рубль выпускаемой продукции.

В отличие от коэффициента капиталопередачи, капиталоемкость показывает не перенесенный на продукцию капитал, а участвующий в ее производстве. При этом не ясны затраты (выбытие) капитала, связанные с единицей продукции. Капиталоемкость является ключевым параметром в посткейнсианских моделях экономического роста, например, в модели Харрода-Домара эта величина присутствует под названием «капитальный коэффициент». Правда, в качестве выпуска в этих моделях рассматривается добавленная стоимость.

Коэффициент капиталопередачи позволяет оценить объем ОФ Δk_{out}, выбывающих в процессе производства V единиц продукции:

$$\Delta k_{out} = k_e V. \tag{176}$$

В европейской литературе процесс капиталопередачи описывается еще с помощью т.н. **интенсивности потребления капитала** (ИПК), под которой понимается часть добавленной стоимости, которую необходимо инвестировать в основной капитал для возмещения его выбытия с целью обеспечения простого воспроизводства. Таким образом, ИПК – это восстановительные затраты капитала, приходящиеся на единицу добавленной стоимости.

Между коэффицитетом капиталопередачи и ИПК существует очевидная связь:

$$i_e(V - M) = k_e V, \tag{177}$$

где i_e – ИПК, V – валовой выпуск, M – промежуточное потребление.

4.3.1 Динамика ИПК в модели Р. Солоу

В модели Р. Солоу **интенсивность потребления капитала** (ИПК) для производимой продукции равна:

$$i_e = k_{in}/y, \tag{178}$$

где k_{in} – прибытие капитала в пересчете на одного рабочего; k – капитал, приходящийся на одного рабочего, $y = F(k)$ – выпуск на одного рабочего.

Согласно модели выбытия капитала (157) $k_{in} = \beta \cdot k$.

Поскольку $y = k^a$, то для ИПК будем иметь:

$$i_e = \beta k^{1-a}, \tag{179}$$

где k согласно модели динамики капитала, является решением следующего уравнения:

$$\frac{dk}{dt} = sk^a - \beta k. \tag{180}$$

В общем случае решение уравнения (180) имеет следующий вид для $a \neq 0$ и $a \neq 1$:

$$k(t) = \left((k(0)^{1-a} - s/\beta) \cdot e^{-\frac{\beta t a^2}{1-a}} + s/\beta\right)^{1/(1-a)}.$$

В самом распространенном случае $a = 0,5$. При таком значении параметра будем иметь следующее решение уравнения (180):

$$k(t) = \left((\sqrt{k(0)} - s/\beta) \cdot e^{-\frac{\beta t}{2}} + s/\beta\right)^2. \tag{181}$$

Для этого случая ИПК равна:

$$i_e(t) = \beta\left((\sqrt{k(0)} - s/\beta) \cdot e^{-\frac{\beta t}{2}} + s/\beta\right). \tag{182}$$

В начальный момент времени при $t = 0$ ИПК пропорционален запасу капитала:

$$i_e(0) = \beta\sqrt{k(0)}.$$

При $t \to \infty$ ИПК пропорционален запасу капитала:

$$i_e(\infty) = s.$$

Из равенства $i_e(0) = i_e(\infty)$ можно определить значение s, при котором ИПК стабильна: это условие простого воспроизводства:

$$s = \beta\sqrt{k(0)}.$$

Таким образом, в модели Р. Солоу любое изменение выпуска y ведет к изменению интенсивности потребления капитала, более того, это изменение зависит от начального запаса капитала (182). Следовательно, можно сделать вывод о бессмысленности измерения ИПК в отраслях экономики.

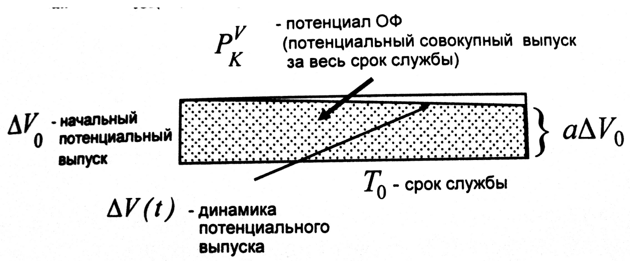

Рис. 18: Модель прироста потенциального выпуска ОФ

4.3.2 Оценка прироста потенциального выпуска ОФ

Для оценки величины прироста потенциального выпуска ОФ ΔV_K^{in} за счет инвестиций предлагается следующая модель.

Пусть вновь приобретенные ОФ стоимостью I имеют следующие характеристики при нормативном использовании (рис.18):

- нормативный срок службы фондов (техническое время жизни единицы основного капитала) T_0 (лет);
- динамика потенциального выпуска.

Динамика потенциального выпуска описывается выражением

$$\Delta V(t) = \Delta V_0 S_K(t), \tag{183}$$

где ΔV_0 – прирост потенциального выпуска, который обеспечивает вновь приобретенные ОФ в начальный момент; $S_K(t)$ – «модель дожития» единицы основных фондов, по аналогии с моделями, представленными на рис.17, но в отличие от этих моделей использована «трапецеидальная» модель (рис.18).

Потенциальный объем продукции, который можно получить с добавленных ОФ до их полного износа равен:

$$P_K^V = b\Delta V_0 T_0, \tag{184}$$

где b – коэффициент, учитывающий падение потенциального выпуска за счет старения ОФ.

В частности, при линейном падении потенциала от возраста:

$$b = \frac{1-a}{2}, \tag{185}$$

где a – коэффициент понижения потенциального выпуска в конце срока службы.

Износ ОФ в такой модели будет подобен износу угольного карандаша, переносящего свой грифель на бумагу. При этом меняется длина карандаша (оставшийся срок службы до полного износа); толщина линии меняется в зависимости от коэффициента понижения потенциального выпуска a.

Согласно модели, изображенной на рис.18, величина прироста потенциального выпуска ОФ за счет инвестиций равна:

$$\Delta V(t) = \Delta V_0 \left(1 + \frac{a-1}{T_0}t\right) = \frac{I}{b(k_e T_0)} \left(1 + \frac{a-1}{T_0}t\right). \tag{186}$$

Для двух крайних случаев «функции дожития»: $a = 0$ и $a = 1$, соответственно, получим:

$$a = 0: \qquad \Delta V(t) = \frac{I}{k_e T_0} 2 \cdot \left(1 - \frac{t}{T_0}\right); \tag{187}$$

$$a = 1: \qquad \Delta V(t) = \frac{I}{k_e T_0}. \tag{188}$$

Полученные соотношения позволяют сделать следующий вывод: *потенциальный прирост годового выпуска продукции за счет инвестиций в ОФ прямо пропорционален величине этих инвестиций и обратно пропорционален коэффициенту капиталопередачи для выпускаемой продукции и сроку службы вводимых ОФ.* Чем больше срок службы ОФ, тем на большее число лет растягивается перенос капитала на продукцию. Совокупный прирост продукции P в результате инвестиций I распределяется на T лет. Таким образом, инвестируя в «долгосрочные» ОФ, мы в значительной мере вкладываем в будущие поколения. Если мы хотим быстрой отдачи от инвестиций, то должны инвестировать в ОФ с высокой скоростью амортизации и низкой капиталопередачей.

Если воспользоваться определением нормы амортизации в соответствии с Налоговым кодексом:

$$n_a = \frac{100}{T_0}\%,$$

то выражение (188) можно переписать следующим образом:

$$\Delta V(t) = I \frac{n_a}{k_e}.$$

Анализируя это выражение, можно сделать следующий вывод: *в случае, когда норма амортизации вводимых ОФ равна коэффициенту капиталопередачи для выпускаемой продукции, потенциальный выпуск на вводимых ОФ численно равен полной стоимости этих фондов.*

4.3.3 Потенциальная характеристика ОФ

Для оценки ΔV_{out} падения потенциального выпуска ОФ за счет износа введем в рассмотрение потенциальную характеристику ОФ (ПХ ОФ) $v^{pot} = f_K(t)$, показывающую потенциальный выпуск, который обеспечили бы существование ОФ в течение t лет ($t = 0, t_1, t_2, \ldots, T_0$) при их полной загрузке с учетом сложившегося распределения оставшегося срока службы ОФ до полного износа и при отсутствии ограничений по другим факторам, без реанимирующих воздействий и дополнительных инвестиций (рис.19). Вводя понятие ПХ, мы рассматриваем производственный потенциал ОФ как неотработанный ресурс отрасли (экономики) в долгострочном периоде. Характеристика строится до настоящего момента времени t.

В начальный момент $t = 0$ при задействовании всех ОФ потенциальный выпуск равен $V^{pot}(0) = f_K(0)$. Через время $t = t_1$ в результате выбытия ОФ и при отсутствии ввода в действие новых ОФ потенциальный выпуск уменьшится на величину $V_{out}(t_1)$ и составит величину $V^{pot}(t_1) = f_K(t_1)$. Аналогично для $t = t_2, \ldots, T_0$. При $t = T_0$ в результате полного выбытия ОФ потенциальный выпуск станетравен нулю: $V^{pot}(T_0) = 0$.

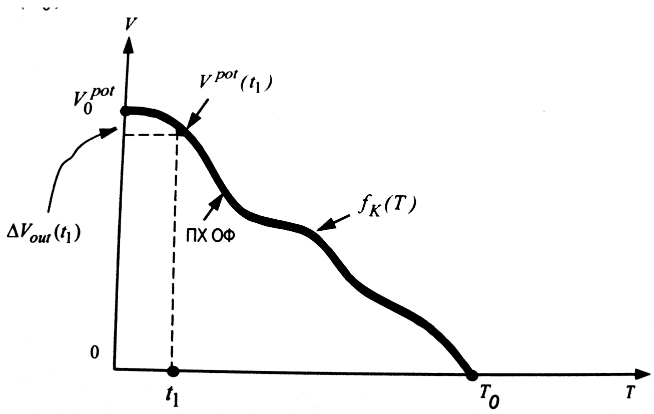

Рис. 19: Пример потенциальной характеристики ОФ

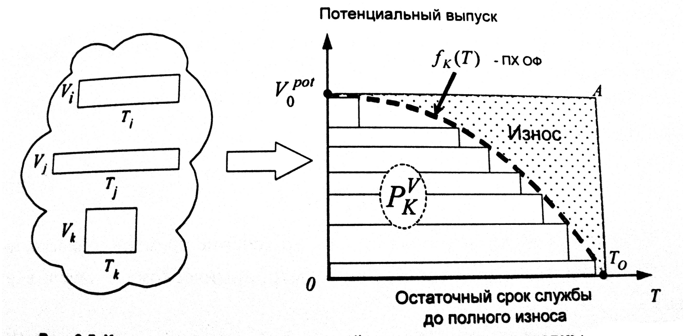

Рис. 20: К построению потенцальной характеристики ОФ

Для иллюстрации физического смысла ПХ ОФ и подхода к ее построению воспользуемся следующим примером. Пусть некоторая авиакомпания имеет N самолетов и каждый i-ый самолет ($i = 1, 2, \ldots, N$) характеризуется следующей парой параметров:

- T_i – оставшийся срок службы до полного износа;
- V_i – годовой объем перевозов (выпуска) при условии нормальной эксплуатации (рис.20).

На рисунке каждой единице оборудования соответствует прямоугольник со сторонами T_i и V_i. Упорядочив эти прямоугольники по убыванию T_i и положив их друг на друга, получим ПХ ОФ авиакомпании – $f_K(T)$, показывающую, как будет изменяться выпуск при полной загрузке ОФ и отсутствии инвестиций (случай $a = 1$). На рисунке $V_0 = f_K(0)$ – потенциальный выпуск в текущий момент, T_0 – полный срок службы. Площадь под ПХ ОФ численно равна потенциальному объему перевозок P_K^V, который потенциально достижим на данном парке самолетов за все оставшееся время эксплуатации при условии нормативной загрузки. Показатель P_K^V можно трактовать как потенциал ОФ. Площадь криволинейного треугольника $V_0^{pot}AT_0$ характеризует текущий износ ОФ.

Теперь выясним, как изменяется ПХ ОФ $f_k(T)$ при выбытии и вводе капитала. Пусть в момент времени t_i имелась ПХ ОФ $f_K^{(i)}$. Пусть авиакомпания проработала

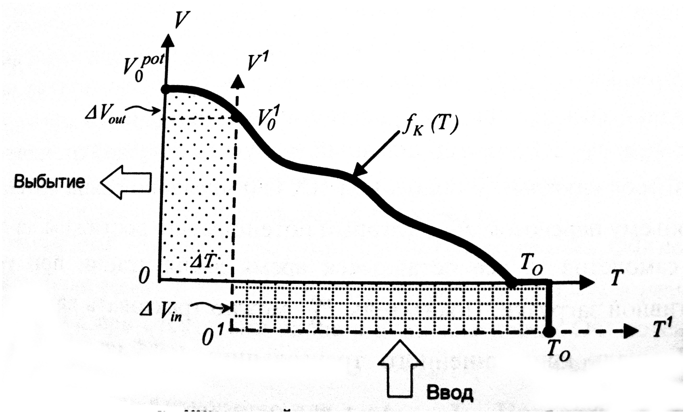

Рис. 21: Изменение потенциальной характеристики при выбытии и вводе ОФ

при полной загрузке некоторый период времени $[t_i; t_{i+1}]$ и в конце этого периодабыли введены ОФ стоимостью I_K за счет инвестиций прошлого периода. При полной загрузке ОФ за время $\Delta T_i = t_{i+1} - t_i$ произойдет выбытие капитала, численно равное площади ПХ ОФ на интервале $[t_i; t_{i+1}]$ (рис.21). При этом потенциальный выпуск упадет на величину

$$\Delta V_K out(t_i, t_{i+1}) = f_K^{(i)}(0) - f_K^{(i)}(\Delta T_i). \tag{189}$$

Графически выбытие капитала равносильно перемещению оси ординат в плоскости ПХ ОФ на величину ΔT вправо.

Введем в рассмотрение параметр ρ, характеризующий загрузку (степень использования) ОФ:

$$\rho(t) = \frac{V(t)}{V_K^{pot}(t)}. \tag{190}$$

Если загрузка ОФ неполная ($\rho < 1$), то течение времени в плоскости ПХ ОФ замедляется по отношению к астрономическому времени в ρ раз:

$$\Delta T_i = (t + i + 1 - t_i)\rho. \tag{191}$$

При простое оборудования ($\rho = 0$) выбытия капитала не происходит, т.е. время для ОФ как бы останавливается. И наоборот, при работе оборудования в две и более смены ($\rho > 1$) время для ОФ ускоряется и они изнашиваются ранее нормативного срока службы.

Величина падения потенциального выпуска зависит от крутизны ПХ ОФ. Чем больше износ ОФ, тем круче ПХ и тем значительнее падение потенциала (189) за один и тот же отрезок времени.

Ввод основного капитала в момент времени t_{i+1} за счет инвестиций прошлых периодов I_K приведет, согласно (188), к росту потенциального выпуска на величину

$$\Delta V_K in(t_{i+1}) = \frac{I_k(t_{i+1} - T_d)}{k_e T_0}, \tag{192}$$

где T_d – задержка ввода ОФ (временной лаг).

Графически ввод основного капитала эквивалентен перемещению оси абсцисс в плоскости ПХ ОФ на величику ΔV_K^{in} вниз (см. рис.21). При этом ось ординат сдвигается на величину ΔT_i вправо за счет выбытия капитала за этот период. В результате

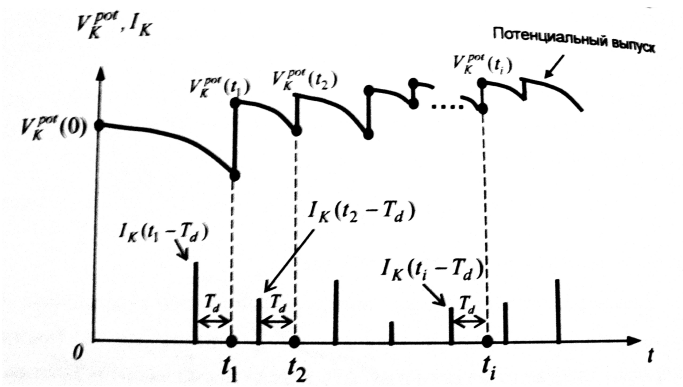

Рис. 22: Прогноз потенциального выпуска по инвестициям в ОФ: $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ – моменты ввода ОФ

получим новую ПХ ОФ $f_K^{(i+1)}(T)$ в новой системе координат $V^{(i+1)}0^{(i+1)}T^{(i+1)}$, т.е.

$$f_K^{(i+1)}(T) = f_K^{(i)}(T + \Delta T_i) + \Delta V_K^{in}(t_{i+1}). \tag{193}$$

Итоговый прирост потенциального выпуска через время ΔT_i будет равен

$$\begin{aligned} \Delta V_K^{pot}(t_{i+1}) &= \Delta V_K^{in}(t_{i+1}) - \Delta V_k^{out}(t_i, t_{i+1}) = \\ &= \frac{I_K(t_{i+1} - T_d)}{k_e T_0} - (f_K^{(i)}(0) - f_K^{(i)}(\Delta T_i)). \end{aligned} \tag{194}$$

Выражения (189)–(194) представляют собойэтапы алгоритма расчета динамики потенциального выпуска ОФ (194) в зависимости от выбытия ОФ и инвестиционных усилий:

$$\begin{aligned} f_K^{(t_i)} \quad \rightarrow \quad & (\text{сдвиг оси ординат впрво на } \Delta T_i = (t_{i+1} - t_i)\rho; \\ & \text{сдвиг оси абсцисс вниз на } \frac{I_K(t - T_d)}{k_E T_0}) \rightarrow f_K^{t_{i+1}}. \end{aligned}$$

Предлагаемый подход позволяет по сценарно задаваемым капитальным вложениям в ОФ на горизонте прогнозирования

$$I_K = I_K(t_i - T_d), \; i = 0, 1, 2, ... \tag{195}$$

прогнозировать динамику потенциального выпуска ОФ на этом горизонте (рис.22).

4.3.4 Определение необходимой нормы накопления

Представляет интерес задача определения нормы накопления s, обеспечивающей устойчивый p%-ый экономический прирост. Задачу можно решить и с помощью рассмотренных выше моделей.

Предположим, что ОФ работают при полной загрузке, т.е. $V(t) = V^{pot}(t)$ для $t \in [0; T]$. И пусть возрастная структура ОФ задается потенциальной характеристикой, имеющей линейный вид (50%-ый износ):

$$f_K(T) = V_0^{pot}(1 - T/T_0), \tag{196}$$

что соответствует простому воспроизводству ОФ.

Пусть за время $\Delta T = 1$ год за счет прироста ОФ произошел прирост выпуска на $q\%$, т.е.

$$q = \frac{V^{pot}(\Delta T)}{V^{pot}(0)} - 1 = \frac{V^{pot}(1)}{V^{pot}(0)} - 1. \tag{197}$$

Согласно (173) для $V^{pot}(1)$ можно записать:

$$V^{pot}(1) = V_0^{pot} + \Delta V_{in}(1) - \Delta V_{out}(1). \tag{198}$$

На основании (188) выпуск возрастает за счет инвестиций в ОФ на величину

$$\Delta V_{in}(1) = \frac{I_K(1)}{k_e T_0}, \tag{199}$$

где $I_K(1)$ – инвестиции в ОФ за время $\Delta T = 1$.

Пусть s_V – норма накопления по отношению к выпуску V.

Тогда

$$\Delta V_{in}(1) = \frac{s_V V_0^{pot}}{k_e T_0}. \tag{200}$$

Согласно (189) и (196), выпуск упадет за счет выбытия ОФ на величину

$$\Delta V_{out}(1) = f_K(0) - f_K(1) = V_0^{pot} - V_0^{pot}(1 - 1/T_0) = V_0^{pot}/T_0. \tag{201}$$

С учетом (200) и (201) выражение (198) можно переписать следующим образом:

$$V^{pot}(1) = V_0^{pot}\left(1 + \frac{s_V}{k_e T_0} - \frac{1}{T_0}\right). \tag{202}$$

Подставляя (202) в (197), будем иметь:

$$q = \frac{s_V}{k_e T_0} - \frac{1}{T_0}. \tag{203}$$

Решая уравнение (203) относительно s_V, получим:

$$s_V = (1 + qT_0)k_e. \tag{204}$$

Формула (204) выведена в предположении, что трудовые ресурсы и оборотные фонды имеются в необходимом количестве, т.е. не являются лимитирующими факторами. Согласно этой формуле, устойчивый экономический рост требует существенных инвестиций.

Например, для ежегодного прироста в 5% (q=0,05) в отрасли с $T_0 = 20$ лет и износом ОФ 50% требуется норма накопления $s_V = 2k_e$, т.е. двойной ИПК.

Для нормы накопления s_Y, рассчитанной по отношению к добавленной стоимости Y, аналогичным образом можно получить следующее отношение:

$$s_Y = (1 + qT_0)i_e, \tag{205}$$

которое устанавливает связь нормы накопления с интенсивностью потребления основного капитала i_e.

Сформулируем важнейшее свойство ПХ ОФ, справедливость которого несложно доказать: *при простом воспроизводстве ($s_V = k_e$ или $s_Y = i_e$) потенциальная характеристика ОФ стремится к линейной, а износ – к 50% независимо от исходных условий.* Проиллюстрируем это свойство (рис.23). Рассмотрим три случая:

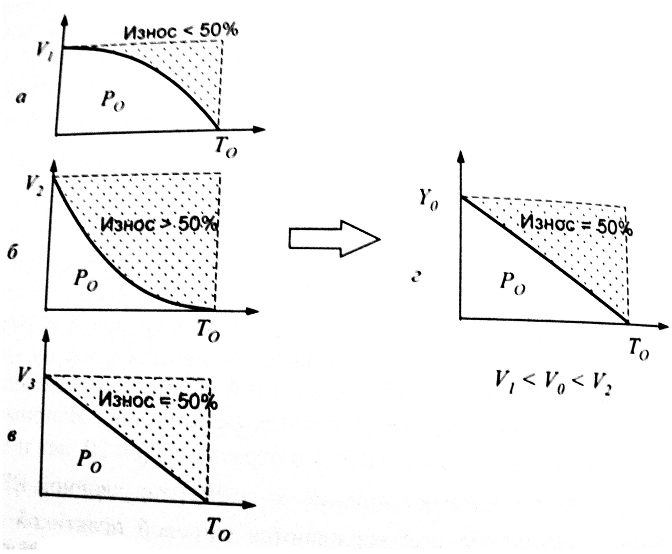

Рис. 23: Динамика ПХ ОФ при простом воспроизводстве

1. начальный износ ОФ меньше 50%;
2. начальный износ ОФ больше 50%;
3. начальный износ ОФ равен 50%.

Предположим, что потенциал основных фондов в начальный момент одинаков для всех случаев и равен P_0. Из геометрических соображений при равенсве площадей под ПХ ОФ будем иметь:

$$V_1 < V_3 < V_2.$$

При простом воспроизводстве потенциал ОФ P_0 не изменяется, но изменяется конфигуация ПХ ОФ в зависимости от величины стартового износа ОФ.

В случае (1) потенциальный выпуск будет расти с величины V_1 до величины $V_0 = 2P_0/T_0$. В случае (2) текущий потенциальный выпуск будет падать с величины V_2 до величины V_0. Таким образом, для одной и той же нормы накопления $s_V = k_e$ в первом случае будем наблюдать рост потенциального выпуска в течение времени T_0, а во втором случае – падение. В случае (3) ПХ ОФ будетвоспроизводить сама себя. Через интервал времени T_0 все ПХ ОФ будут иметь одну и ту же форму (рис.23.г).

Список литературы